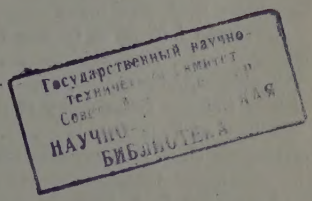
АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ VI
ВЫПУСК
2



1961

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том VI *1961* *Выпуск 2*

СОСТАВ РЕДКОЛЛЕГИИ:

Бернштейн С. Н., ***Гнеденко Б. В.***, ***Золотарев В. М.*** (ответственный секретарь), ***Колмогоров А. Н.*** (главный редактор), ***Королюк В. С.***, ***Линник Ю. В.***, ***Прохоров Ю. В.*** (зам. главного редактора), ***Сарымсаков Т. А.***, ***Смирнов Н. В***

СОДЕРЖАНИЕ

Линник Ю. В. Предельные теоремы для сумм независимых величин при учете больших уклонений. I 145
Linnik Yu. V. Limit Theorems for the Sums of Independent Variables Taking into Account the Big Deviations. I 162
Матвеев Р. Ф. О регулярных многомерных стационарных процессах 164
Matveev R. F. Sur les Processus Réguliers Stationnaires vectorielles . . . 181
Hájek J. On linear Estimation Theory for an Infinite Number of Observations . 182
Гаек Я. К теории линейных оценок при бесконечном количестве наблюдений 193
Сарымсаков Т. А. Неоднородные цепи Маркова 194
Sarimsakov T. A. Inhomogeneous Markov Chains 201
Волконский В. А., Розанов Ю. А. Некоторые предельные теоремы для случайных функций. II 202
Volkonsky V. A., Rozanov Yu. A. Some Limit Theorems for Random Functions. II 215

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Арато М. О достаточных статистиках стационарных гауссовских случайных процессов 216
Arató M. Sufficient Statistics of Stationary Gaussian Processes 218
Золотарев В. М. Об одной вероятностной задаче 219
Zolotarev V. M. Concerning a Certain Probability Problem 222
Коваленко И. Н. Некоторые задачи массового обслуживания с ограничением . 222
Kovalenko I. N. Some Queing Problems with Restrictions 228
Лян Чжи-шуэн. Инвариантность строго марковского свойства при преобразованиях Дынкина 228
Leung Chi-son. Invariability of the Strong Markov Property in the Transformations of E. B. Dynkin 231
Постникова Л. П. О связи понятий коллектива Мизеса — Черча и нормальной по Бернулли последовательности знаков 232
Postnikova L. P. Über die Zusammenhang der Begriffe des Kollektives von Mises — Church und der nach Bernoulli normalen Zeichenfolge . . . 234
Хазен Э. М. Определение плотности распределения вероятностей для случайных процессов в системах с нелинейностями кусочно-линейного типа . . . 234
Khasen E. M. Estimating the Probability Density for Random Processes in Systems with Nonlinear Reformers of the Piecing-linear Type 241
Резюме докладов, сделанных на заседаниях семинара по математической статистике в Математическом ин-те АН СССР 242
Kruskal W. Missing and Extra Observations in Analysis of Variance 251
Крускал В. Недостающие и излишние наблюдения в дисперсионном анализе 251

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Рецензия на книгу Ю. В. Линника «Разложения вероятностных законов» *Б. В. Гнеденко* 252
Рецензия на книгу Е. Б. Дынкина «Основания теории марковских процессов» *Ю. А. Розанов* 253
Рецензия на книгу Е. Хеннан «Анализ временных рядов» *Ю. А. Розанов* . . 255

Адрес редакции: Москва, В-234, МГУ, Мех.-матем. факультет, тел. В 9-14-03

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том VI И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 2
1961

Государственный научно-технический комитет Совета [illegible] СССР
НАУЧНО-[illegible]ЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН ПРИ УЧЕТЕ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ. I*

Ю. В. ЛИННИК

1. Формулировки. Простейшие зоны локального нормального притяжения. «Узкие» простейшие зоны интегрального нормального притяжения.

Здесь рассматриваются независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с $\mathbf{E}(X_i) = 0$; $\mathbf{D}(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Составляются нормированные уклонения:

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sigma\sqrt{n}}. \tag{0.1}$$

Из классической теории суммирования случайных величин (см. [1]) известно, что при всяком данном x и $n \to \infty$ имеем:

$$\mathbf{P}(Z_n > x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2}\, du \to 0 \tag{0.2}$$

и соотношение (0.2) выполняется равномерно по x. Если x может возрастать вместе с n, то при $n \to \infty$ из (0.2) следует лишь, что $\mathbf{P}(Z_n > x) \to 0$. В некоторых случаях желательно иметь более точную информацию о поведении $\mathbf{P}(Z_n > x)$ — возникает проблема изучения вероятностей больших уклонений.

Подобные вопросы возникают, например, в математической статистике [2], теории информации [3], аналитической арифметике [4], [5]. Они изучались А. Я. Хинчиным [6], Н. В. Смирновым [7], Г. Крамером [8], В. В. Петровым [9], В. Рихтером [10], [11], [12] и другими. В данной работе будут трактоваться вопросы нормальной сходимости в случае интегральных и локальных теорем, а также (в третьей части работы) — некоторые предельные теоремы, действующие «на всей оси» (при любых значениях x).

Пусть $\Psi(n) \to \infty$ — какая-либо монотонная функция. Последовательность сегментов $[0, \Psi(n)]$ будет называться зоной (интегрального) нормального

* Данная работа содержит подробный вывод результатов, кратко изложенных в моем докладе [13].

притяжения (з. н. п.), если:

$$\frac{\mathbf{P}(Z_n > x)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_x^\infty e^{-u^2/2}\,du} \to 1. \tag{0.3}$$

Для случая, когда Z_n имеет плотность вероятности $p_{Z_n}(x)$, будем рассматривать зоны равномерного локального нормального притяжения (з. р. л. н. п.).

Зона $[0, \Psi(n)]$ будет называться з. р. л. н. п., если

$$\frac{p_{Z_n}(x)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}} \to 1 \tag{0.4}$$

равномерно по $x \in [0, \Psi(n)]$. Аналогично определяются з. р. л. н. п. вида $[-\Psi(n), 0]$.

Как будет видно из дальнейшего, особую роль будут играть з. н. п. $[0, \Psi(n)]$ и $[-\Psi(n), 0]$, где

$$\Psi(n) = o(n^{1/6}). \tag{0.5}$$

Такие зоны будем называть «узкими».

В данной части работы мы изучим обширный класс «узких» з. р. л. н. п., «узких» з. н. п., и из з. р. л. н. п. и з. н. п., не являющихся, вообще говоря, «узкими», рассмотрим зоны $[0, \Psi(n)]$ и $[-\Psi(n), 0]$, где $\Psi(n) = n^\alpha$ ($\alpha > 0$ -константа).

Обозначения: $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$; $\eta_1, \eta_2, \ldots$; $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — малые положительные константы, выбираемые — каждая по предыдущим; $c_0, c_1, \ldots$; $C_0, C_1, \ldots$; $K_0, K_1, \ldots$ — положительные константы, выбираемые аналогично, B — ограниченное число, не всегда одно и то же.

2. Зоны $[0, \Psi(n)]$, $[-\Psi(n), 0]$, где $\Psi(n) = n^\alpha$ ($\alpha > 0$-константа) будем называть *«простейшими»*. Из зон, не являющихся «узкими», мы будем трактовать только простейшие.

Узкие зоны $[0, \Lambda(n)]$, $[-\Lambda(n), 0]$ (где $\Lambda(n) = o(n^{1/6})$ — монотонная функция) в дальнейшем у нас будут связаны с неубывающей непрерывной функцией $h(x)$, заданной при $x \geqslant 2$. Такие функции мы будем рассматривать из трех классов; естественность рассмотрения именно этих классов будет обоснована далее.

Класс I: функции $h(x)$ под условиями

$$(\ln x)^{2+\xi_0} \leqslant h(x) \leqslant x^{1/2} \tag{1.1}$$

($\xi_0 > 0$ сколь угодно мало). Далее, если положить:

$$h(x) = \exp(H(\ln x)),$$

то $H(z)$ должна быть монотонной дифференцируемой функцией, и притом должно быть:

$$H'(z) \leqslant 1;\ H'(z) \to 0 \text{ при } z \to \infty \tag{1.2}$$

$$H'(z) \exp H(z) > c_1 z^{1+\xi_1}. \tag{1.3}$$

Класс II: неубывающие непрерывные $h(x)$ под условиями:

$$\left.\begin{gathered}\rho_0(x) \ln x \leqslant h(x) \leqslant (\ln x)^2;\ h(x) = M(x) \ln x = N(\ln x) \ln x \\ N'(z) \to 0 \text{ при } z \to \infty\end{gathered}\right\} \tag{1.4}$$

в дальнейшем $\rho_0(x)$, $\rho_1(x), \ldots,$ $\rho_i(x), \ldots$ — заданные сколь угодно медленно возрастающие функции.

Класс III: $h(x)$ под условием:

$$3\ln x \leqslant h(x) \leqslant M \ln x, \tag{1.5}$$

где $M \geqslant 3$ константа.

3. Локальные предельные теоремы мы будем доказывать для класса случайных величин X_j, обладающих ограниченной непрерывной плотностью вероятности $g(x)$ (этот класс назовем классом (d)). Надо заметить, что предложенный здесь метод доказательства предельных теорем с учетом больших уклонений гораздо проще в применении к локальным теоремам, чем к интегральным. Это объясняется тем, что локальные теоремы мы будем доказывать для класса (d), тогда как интегральные теоремы — без ограничения на случайные величины X_j (помимо существования дисперсии).

Сформулируем сперва некоторые теоремы, имеющие место для простейших зон. Все локальные теоремы у нас будут формулироваться только для величин X_j класса (d).

Теорема 1. *Если для любого* $\alpha < \frac{1}{2}$, *зоны* $[0, n^\alpha]$ *и* $[-n^\alpha, 0]$ *суть з. р. л. н. п., то все переменные* X_j *нормальны.*

(В части III настоящей работы аналогичная теорема доказывается для зон интегрального нормального притяжения).

Таким образом, интересны лишь простейшие зоны, отвечающие $\alpha < \frac{1}{2}$. Теорема 1 следует из более сложной теоремы 2.

Теорема 2. *Пусть* $\rho(n) \to \infty$ — *монотонная сколь угодно медленно возрастающая функция;* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. *Если* $\alpha < \frac{1}{6}$, *то необходимым условием для того, чтобы зоны* $[0, n^\alpha \rho(n)]$, $[-n^\alpha \rho(n), 0]$ *были обе з. р. л. н. п., будет:*

$$\mathbf{E} \exp |X_j|^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}} < \infty. \tag{2.1}$$

Это условие и достаточно для того, чтобы зоны $\left[0, \frac{n^\alpha}{\rho(n)}\right]$ *и* $\left[-\frac{n^\alpha}{\rho(n)}, 0\right]$ *были з. р. л. н. п.*

Если $\frac{1}{6} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, *рассмотрим ряд «критических чисел»*

$$\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{10}, \ldots, \quad \frac{1}{2}\frac{s+1}{s+3}, \ldots \tag{2.2}$$

Пусть $\frac{1}{2}\frac{s+1}{s+3} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}\frac{s+2}{s+4}$. *Если зоны* $[0, n^\alpha \rho(n)]$; $[-n^\alpha \rho(n), 0]$ *суть з. р. л. н. п., должно иметь место условие* (2.1), *и все моменты* X_j *до* $(s+3)$*-го включительно должны совпадать с моментами нормального закона. Эти два условия достаточны для того, чтобы зоны* $\left[0, \frac{n^\alpha}{\rho(n)}\right]$ $\left[-\frac{n^\alpha}{\rho(n)}, 0\right]$ *были з. р. л. н. п.*

Теорема 3. *Если* $\alpha < \frac{1}{6}$, *то для того, чтобы зоны* $[0, n^{\alpha}\rho(n)]$; $[-n^{\alpha}\rho(n), 0]$ *были з. н. п.* (*интегральными*), *необходимо выполнение условия* (2.1). *Оно достаточно для того, чтобы зоны* $\left[0, \frac{n^{\alpha}}{\rho(n)}\right]$; $\left[-\frac{n^{\alpha}}{\rho(n)}, 0\right]$ *были з. н. п. и сходимость* (0.3) *в этих зонах равномерна.*

4. В этой части работы мы будем трактовать лишь простейшие зоны. Остановимся на условии (2.1).

Лемма 1. *Пусть* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. *Условие* (2.1) *необходимо для того, чтобы зоны* $[0, n^{\alpha}\rho(n)]$; $[-n^{\alpha}\rho(n), 0]$ *были з. н. п.*

В самом деле, пусть условие (2.1) нарушено. Тогда существует последовательность $x_m \to \infty$ такая, что либо

$$\mathbf{P}(X_1 > x_m) > \exp(-2x_m^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}), \tag{4.1}$$

либо

$$\mathbf{P}(X_1 < -x_m) > \exp\left(-2x_m^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}\right). \tag{4.2}$$

Пусть (4.1) имеет место. Для достаточно большого m выберем n такое, что $x_m = \sigma n^{1/2+\alpha}\rho(n) + \theta$; $|\theta| \leqslant 1$. Зона $[0, n^{\alpha}\rho(n)]$ должна быть з. н. п., и мы должны иметь:

$$\mathbf{P}\left(Z_n > \frac{n^{\alpha}\rho(n)}{2}\right) < \exp\left(-\frac{n^{2\alpha}(\rho(n))^2}{16}\right). \tag{4.3}$$

Но событие $Z_n > \frac{n^{\alpha}\rho(n)}{2}$, наверное, произойдет, если случатся два независимых события $X_1 > \sigma n^{1/2+\alpha}\rho(n) + \theta\left|\frac{X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{\sigma\sqrt{n}}\right| < 1$. Отсюда, по центральной предельной теореме и (4.1):

$$\mathbf{P}\left(Z_n > \frac{n^{\alpha}\rho(n)}{2}\right) > c_0\mathbf{P}(X_1 > x_m) > c_0\exp\left[-c_1 n^{2\alpha}\left(\rho(n)\right)^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}\right]. \tag{4.4}$$

Так как $\alpha < \frac{1}{2}$, $\frac{4\alpha}{2\alpha+1} < 1$, то (4.4) противоречит (4.3). Случай (4.2) трактуется аналогично.

Лемма 2. *В условии леммы* 1 *условие* (2.1) *необходимо для того, чтобы зоны* $[0, n^{\alpha}\rho(n)]$; $[-n^{\alpha}\rho(n), 0]$ *были з. р. л. н. п.* Разумеется, речь идет о случайных величинах класса (d). Заметим, что лемму 2 нельзя непосредственно вывести из леммы 1, так как локальная равномерная сходимость в указанных выше зонах не дает полных сведений о $\mathbf{P}(Z_n > x)$.

Пусть (2.1) не выполняется. Покажем, что тогда существует последовательность $x_m \to \infty$ таких, что либо

$$\int_{x_m}^{2x_m} g(x)\,dx > \exp\left(-4x_m^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}\right). \tag{4.5}$$

либо

$$\int_{-2x_m}^{-x_m} g(x)\,dx > \exp\left(-4x_m^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}\right). \tag{4.6}$$

В самом деле, если такой последовательности нет, то при любых

$$\int_{x}^{2x} g(x)\,dx = B\exp\left(-4x^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}\right) \tag{4.7}$$

и аналогичное условие имеет место для $x<0$. Тогда,

$$\int_{x}^{2x} \exp\left(x^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}\right) g(x)\,dx = B\exp\left(-x^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}\right), \quad (x>0).$$

Полагая $x = 1, 2, 4, \ldots, 2^s, \ldots$, и проводя то же рассуждение для $x<0$, придем к (2.1), что противоречиво. Итак, (4.5) или (4.6) имеют место. Пусть имеем (4.5), полагаем $x_m = \sigma n^{1/2+\alpha}\rho(n) + \theta$; $|\theta| \leqslant 1$. Так как $[0, n^\alpha\rho(n)]$ есть з. р. л. н. п., то

$$\mathbf{P}\left(\frac{n^\alpha\rho(n)}{2} \leqslant Z_n \leqslant \frac{5}{2}n^\alpha\rho(n)\right) < \exp\left(-n^{2\alpha}(\rho(n))^2\cdot c_3\right), \tag{4.8}$$

Событие, указанное в скобках в левой части (4.8), наверное, произойдет, если будет: $x_m \leqslant X_1 \leqslant 2x_m$; $\left|\dfrac{X_2+X_3+\ldots+X_n}{\sigma\sqrt{n}}\right| < 1$. Далее рассуждаем, как в доказательстве леммы 1. Таким образом, необходимость условия (2.1) в теоремах 2 и 3 доказана.

5. Переходим к доказательству теоремы 2. Примем условие (2.1), причем будем задавать его в ослабленной форме:

$$\mathbf{E}\exp\left(A\,|X_j|^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}\right) < \infty, \tag{5.1}$$

где $A<1$ константа. При этом, не нарушая общности, будем считать $\sigma^2 = 1$. Из (5.1) следует существование всех моментов. Пусть задано $\alpha < \frac{1}{2}$. Если $\alpha \geqslant \frac{1}{6}$, рассмотрим ряд чисел (2.2). Пусть

$$\frac{1}{2}\frac{s+1}{s+3} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}\frac{s+2}{s+4}. \tag{5.2}$$

Если первое неравенство не обращается в равенство, рассмотрим центральные моменты X_j: $\mu_3, \mu_4, \ldots, \mu_{s+3}$ и семиинварианты: $\varkappa_3 = \mu_3$; $\varkappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$, $\varkappa_5 = \mu_5 - 10\mu_3\mu_2, \ldots, \varkappa_{s+3}$. Если же имеет место равенство, то берем моменты $\mu_3, \ldots, \mu_{s+2}$, и семиинварианты $\varkappa_3, \ldots, \varkappa_{s+2}$. Пока остановимся на случае, когда в (5.2) нет равенства. Допустим теперь, что первый неисчезающий семиинвариант есть $\varkappa_a$; $3 \leqslant a \leqslant s+3$, так что:

$$\varkappa_2 = 0\ (r < a = s_0 + 3);\ \varkappa_{s+3} \neq 0. \tag{5.3}$$

Здесь $s_0 \leqslant s$. Мы будем делать, таким образом, вывод о предположении, что $a = s_0 + 3 \geqslant 3$ (к случаю $\alpha < \frac{1}{6}$, или знака равенства в (5.2) мы вернемся позже).

Величины X_j принадлежат классу (d), т. е. имеют непрерывную и ограниченную плотность вероятности $g(x)$. Положим $\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g(x)\,dx$, так что $\varphi(t)$ х. ф. X_j. При этом $|\varphi(t)|^2$ будет х. ф. $X_1 - X_1'$, где X_1' — одинаково распределено с X_1 и независимо от него; величина $X_1 - X_1'$ имеет плотность вероятности (ибо $g(x)$ ограничена); стало быть, $|\varphi(t)|^2$ имеет неотрицательное преобразование Фурье. В таком случае согласно одной теореме теории интегралов Фурье (см. [14], стр. 20), $|\varphi(t)|^2 \in L_1(-\infty, \infty)$, так что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2\,dt < \infty. \tag{5.4}$$

Нормированная сумма Z_n имеет плотность вероятности $p_{Z_n}(x)$. Имеем:

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\varphi(t))^n \exp(-it\sqrt{n}\,tx)\,dt. \tag{5.5}$$

Далее, $|\varphi(t)| < 1$ при $t \neq 0$, и $\varphi(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$. Таким образом, если $0 < \varepsilon_0 < 1$ любое число, то, при учете (5.4), получим:

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int\limits_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} (\varphi(t))^n \exp(-it\sqrt{n}\,tx)\,dt + R_1, \tag{5.6}$$

где

$$|R_1| = B \exp(-\varepsilon_1 n). \tag{5.7}$$

В силу условия (5.1) функция $\varphi(t)$ бесконечно дифференцируема на всей оси. При любом $T > 0$, $|t| \leqslant T$, $p > 0$ целом, имеем:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t\varphi'(0)}{1!} + \ldots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(0) + \frac{t^p}{p!} R_p(t), \tag{5.8}$$

где

$$|R_p(t)| \leqslant 2 \sup_{|t| \leqslant T} |\varphi^{(p)}(t)|. \tag{5.9}$$

Далее, $\varphi'(0) = 0$; $\varphi''(0) = -1$, так что при $|t| \leqslant \varepsilon_0$ и подходящем ε_0, в силу (5.8),

$$|\varphi(t)| \leqslant 1 - \frac{t^3}{4}. \tag{5.10}$$

Положим теперь

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{s_0 + 3} < \alpha, \tag{5.11}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2} - \alpha_1 = \frac{1}{s_0 + 3}. \tag{5.12}$$

Из (5.10) замечаем, что при $n^{-\mu_1} \leqslant |t| \leqslant \varepsilon_0$, имеем:

$$|\varphi(t)|^n \leqslant \left(1 - \frac{n^{-2\mu_1}}{4}\right)^n = B \exp(-c_4 n^{2\alpha_1}). \tag{5.13}$$

6. Функция $\varphi(t)$ бесконечно дифференцируема, но, вообще говоря, не аналитическая (и даже не квазианалитическая). Нам будут нужны оценки

для $\varphi^{(q)}(t)$ при больших q. Имеем:

$$|\varphi^{(q)}(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |x|^q g(x)\,dx. \tag{6.1}$$

Положим

$$k = \frac{1+2\alpha}{4\alpha}. \tag{6.2}$$

Тогда из (5.1) получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(A|x|^{\frac{1}{k}}\right) g(x)\,dx < \infty. \tag{6.3}$$

Отсюда выводим: при любом $x \geqslant 1$, $\exp\left(Ax^{\frac{1}{k}}\right)\int_x^{\infty} g(u)\,du < \infty$, и аналогичное соотношение для $x \leqslant -1$. После этого легко находим:

$$|\varphi^{(q)}(t)| = B^q \Gamma(kq). \tag{6.4}$$

Положим: $K(t) = \ln \varphi(t)$; $K(0) = 0$ ($|t| \leqslant n^{-\mu_1}$). Из (5.6) и (5.13) выводим

$$p_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-n^{-\mu_1}}^{n^{-\mu_1}} \exp\left(n K(t) - \sqrt{n}\,itx\right) dt + B\exp\left(-c_4 n^{2\alpha_1}\right). \tag{6.5}$$

Из (5.10) видим, что при $|t| \leqslant \varepsilon_0$:

$$K(t) = B. \tag{6.6}$$

Нам нужны будут оценки для $K^{(q)}(t_0)$, при $|t_0| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$. Положим

$$\widetilde{\varphi}_q(t+t_0) = \varphi(t_0) + \frac{t\varphi'(t_0)}{1!} + \ldots + \frac{t^q \varphi^{(q)}(t_0)}{q!}. \tag{6.7}$$

Тогда получим:

$$K^{(q)}(t_0) = \left(\ln \widetilde{\varphi}(t+t_0)\right)^{(q)}\Big|_{t=0}. \tag{6.8}$$

В самом деле, для расчета $K^{(q)}(t_0)$ нам нужны только производные $\varphi^{(p)}(t_0)$, при $p \leqslant q$, которые совпадают с $\widetilde{\varphi}^{(p)}(t_0)$. Если C_ρ круг $|t| \leqslant \rho$, где полином $\widetilde{\varphi}_q(t+t_0)$ не имеет нулей, то $\ln \widetilde{\varphi}(t+t_0)$ аналитическая в круге $|t| \leqslant \rho$, и

$$K^{(q)}(t_0) = \frac{q!}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{\ln \widetilde{\varphi}(t+t_0)}{t^{q+1}}\,dt. \tag{6.9}$$

Обратимся теперь к (6.7). Соотношение (6.4) дает:

$$\frac{\varphi^{(p)}(t_0)}{p!} = B\exp\left(B_p + (k-1)\,p\ln p\right). \tag{6.10}$$

Теперь в качестве C_ρ избирается окружность

$$|t| = \exp\left(-K_0 - (k-1)\ln q\right). \tag{6.11}$$

В этом круге имеем:

$$\sum_{p=1}^{q} \frac{\varphi^{(p)}(t_0)}{p!} t^p = B \sum_{p=1}^{q} \exp\left(B_p - K_0 p + (k-1)\, p\,(\ln p - \ln q)\right). \tag{6.12}$$

При достаточно большом K_0 абсолютная величина (6.12) не превосходит $\frac{1}{4}$. Отсюда, и из (5.8) имеем (при достаточно большом K_0) при $|t| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$

$$K^{(q)}(t_0) = B \exp(Bq + kq \ln q). \tag{6.13}$$

Далее, имеем при $(t) \leqslant n^{-\mu_1}$.

$$K(t) = K(0) + \frac{tK'(0)}{1!} + \ldots + \frac{t^m K^{(m)}(0)}{m!} + R_m(t), \tag{6.14}$$

где при $|t| \leqslant n^{-\mu_1}$

$$\left| \frac{t^m R_m(t)}{m!} \right| = B \exp\{m(B + (k-1)\ln m - \mu_1 \ln n)\}. \tag{6.15}$$

Теперь выберем целое число m вида

$$m = \left[\frac{n^{2\alpha_1}}{K_1} \right], \tag{6.16}$$

где K_1 достаточно большая константа, которую выберем далее. Имеем, учитывая, что $k = \frac{1+2\alpha}{4\alpha}$; $\mu_1 = \frac{1}{2} - \alpha_1$:

$$B \exp(Bm + (k-1)\, m \ln m - \mu_1 m \ln n) =$$

$$= B \exp\left(Bm + (k-1)\, m \ln m - \left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right) m \ln n\right) =$$

$$= B \exp\left(Bm + m\left(\frac{1-2\alpha}{4\alpha}(2\alpha \ln n - \ln K_1) - \left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right)\ln n\right)\right) =$$

$$= B \exp\left[m\left(B - (\alpha - \alpha_1)\ln n - \frac{1-2\alpha}{4\alpha} \ln K_1\right)\right]. \tag{6.17}$$

Но $\alpha \geqslant \alpha_1$; $1 - 2\alpha > 0$, так, что (6.17) и (6.15) имеют оценку

$$B \exp(-\varepsilon_1 n^{2\alpha_1}), \tag{6.18}$$

если K_1 выбрано достаточно большим. Здесь $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(K_1)$.

7. Положим $\Psi_r = K^{(r)}(0)$; известно, что величины Ψ_r лишь степенями i^r отличаются от семиинвариантов X_j. Ввиду этого $\Psi_r = 0$ при $3 \leqslant r < s_0 + 3$. Далее, имеем

$$nK(t) = -\frac{nt^2}{2} + n \sum_{r=s_0+3}^{m} \Psi_2 \frac{t^2}{r!} + B \exp(-\varepsilon_1 n^{2\alpha_1}). \tag{7.1}$$

Далее $\operatorname{Re} nK(t) \leqslant 0$ при $|t| \leqslant n^{-\mu_1}$. Полагая

$$K_{s_0+3}(t) = \sum_{r=s_0+3}^{m} \frac{\Psi_r}{r!} t^r, \tag{7.2}$$

найдем из (6.5), (6.14) и (6.18)

$$p_{z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int_{-n^{-\mu_1}}^{n^{-\mu_1}} \exp\left(-n\frac{t^2}{2} + nK_{s_0+3}(t) - i\sqrt{n}tx\right)dt + B\exp(-\varepsilon_2 n^{2\alpha_1}). \tag{7.3}$$

Займемся теперь целой функцией

$$\exp(nK_{s_0+3}(t)) = 1 + \sum_{r=s_0+3}^{\infty}\frac{\chi_r t^r}{r!} \tag{7.4}$$

(где через χ_r обозначены коэффициенты). Важно отметить (это следует из (7.2)), что

$$\chi_{s_0+3} = n\Psi_{s_0+3}. \tag{7.5}$$

Далее, согласно (6.13) (при $t_0 = 0$): если $|t| \leqslant n^{-\mu_1}$, $r \leqslant m$:

$$\frac{t^r\Psi_r}{r!} = B\exp\left[r\left(B + \frac{1-2\alpha}{4\alpha}\ln r - \mu_1\ln n\right)\right]. \tag{7.6}$$

При $r \leqslant C_1$ (7.6) дает: при $|t| \leqslant n^{-\mu_1}$

$$Bn^{-r\mu_1}. \tag{7.7}$$

При $r > C_1$, замечаем, что если $\ln r \leqslant \mathrm{E}_1 \ln n$, то (7.6) дает

$$Bn^{-\mathrm{E}_1 r}. \tag{7.8}$$

Если же $\ln r > \mathrm{E}_1 \ln n$, то, согласно (6.17) и (6.18), для (7.6) найдем оценку:

$$B\exp(-\mathrm{E}_1 r) \quad (n^{\mathrm{E}_1} \leqslant r \leqslant m). \tag{7.9}$$

Таким образом, на окружности $|t| \leqslant n^{-\mu_1}$ имеем:

$$nK_{s_0+3}(t) = Bn\sum_{r=s_0+3}^{C_1} n^{-r\mu_1} + \frac{B}{n} = Bn\sum_{r=s_0+3}^{C_1} n^{-\frac{r}{s_0+3}} = B, \tag{7.10}$$

ввиду (5.12).

Отсюда имеем: снова применяя интеграл Коши по окружности $|t| = n^{-\mu_1}$ и пользуясь (7.10)

$$\chi_r = Br!\,n^{r\mu_1}. \tag{7.11}$$

Отдельно отметим, что в силу (7.5) и того, что $\Psi_{s_0+3} \neq 0$, χ_{s_0+3} имеет точный порядок n. Пусть теперь

$$|t| \leqslant \eta_1 n^{-\mu_1}. \tag{7.12}$$

Тогда $\frac{\chi_r t^r}{r!} = B\eta_1^r$, $(r = s_0 + 3,\ s_0 + 4, \ldots)$ при m, выбранном согласно (6.16)

$$B\eta_1^m = B\exp\left(n^{2\alpha_1}\frac{\ln\eta_1}{K_1}\right) = B\exp(-\varepsilon_2 n^{2\alpha_1}), \tag{7.13}$$

где

$$\varepsilon_2 = -\frac{\ln\eta_1}{K_1}. \tag{7.14}$$

8. Возвращаясь к (5.13) и (6.5), заменим $n^{-\mu_1}$ в (6.5) на $\eta_1 n^{-\mu_1}$; тогда (7.3) примет вид

$$P_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int\limits_{-\eta_1 n^{-\mu_1}}^{\eta_1 n^{-\mu_1}} \exp\left(-\frac{nt^2}{2}\right) \exp\left(nK_{s_0+3}(t)\right) \exp\left(-itx\sqrt{n}\right) dt + \\ + B \exp\left(-c_4 \eta_1^2 n^{2\alpha_1}\right), \tag{8.1}$$

откуда, учитывая (7.13) и (7.4), найдем:

$$P_{Z_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int\limits_{-\eta_1 n^{-\mu_1}}^{\eta_1 n^{-\mu_1}} \exp\left(-\frac{nt^2}{2}\right) \left(1 + \sum_{r=s_0+3}^{m} \frac{\chi_r}{r!} t^r\right) \exp\left(-itx\sqrt{n}\right) dt + R_1, \tag{8.2}$$

где

$$R_1 = B \exp\left(-c_4 \eta_1^2 n^{2\alpha_1}\right) + B \exp\left(-\varepsilon_3 n^{2\alpha_1}\right) \tag{8.3}$$

при

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_2}{2} = \frac{\ln \eta_1^{-1}}{2K_1}. \tag{8.4}$$

Сделаем замену $\xi = t\sqrt{n}$; тогда найдем:

$$P_{Z_n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\eta_1 n^{1/2-\mu_1}}^{\eta_1 n^{1/2-\mu_1}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \left(1 + \sum_{r=s_0+3}^{m} \frac{\chi_r}{r!} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^r\right) \exp\left(-i\xi x\right) d\xi + R_1. \tag{8.5}$$

Для $r \leqslant m$, как нетрудно убедиться,

$$\int\limits_{\eta_1 n^{1/2-\mu_1}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \frac{\chi_r}{r!} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r \xi^r d\xi = B \frac{r!\, n^{\mu_1 r}}{r!} n^{-r/2} \int\limits_{\eta_1 n^{1/2-\mu_1}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \xi^r d\xi = \\ = B^r \exp\left(-\frac{\eta_1^2}{4} n^{1-2\mu_1}\right) \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) n^{-\left(\frac{1}{2}-\mu_1\right) r}. \tag{8.6}$$

Далее имеем при $r \leqslant m$:

$$B^r \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) n^{-r\left(\frac{1}{2}-\mu_1\right)} = B \exp\left(Br + \frac{r}{2} \ln r - r\left(\frac{1}{2} - \mu_1\right) \ln n\right) = \\ = B \exp\left(Br + r\left(\alpha_1 \ln n - \frac{1}{2} \ln K_1 - \alpha_1 \ln n\right)\right) = \\ = B \exp\left(Br - \frac{r}{2} \ln K_1\right) = B \exp\left(-c_5 r\right). \tag{8.7}$$

Суммируя в (8.6) по $r \leqslant m$, найдем оценку:

$$B \exp\left(-\frac{\eta_1^2}{4} \cdot n^{2\alpha_1}\right). \tag{8.8}$$

Такое же выражение выходит для интеграла по интервалу $(-\infty, -\eta_1 n^{1/2-\mu_1})$, так что вместо (8.2) найдем:

$$P_{Z_n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \left(1 + \sum_{r=s_0+3}^{m} \frac{\chi_r}{r!} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^r\right) \exp\left(-i\xi x\right) d\xi + R_2, \tag{8.9}$$

где R_2 имеет ту же оценку (8.3), что и R_1.

9. Таким образом, нам надлежит рассмотреть при $r \leqslant m$ выражение

$$n^{-r/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2} e^{i\xi x} \xi^r d\xi = n^{-r/2} H_r^{(0)}(x) e^{-x^2/2}, \tag{9.1}$$

где $H_r^{(0)}(x)$ — полиномы Эрмита от аргумента ax при подходяще выбранном $a > 0$, и нормирующем множителе.

Пусть теперь

$$0 < x < \zeta n^{\alpha_1} = \zeta n^{1/2-\mu_1} \tag{9.2}$$

Мы будем рассматривать при $C_2 < r \leqslant m$ оценки выражений (9.1). Для полиномов Эрмита $H_q(x)$ имеем следующее выражение (см. [15])

$$H_q(x) = q! \sum_{s=0}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2x)^{q-2s}}{s!\,(q-2s)!}. \tag{9.3}$$

Отсюда ($x \geqslant 0$ и кроме того, мы считаем $0^0 = 1$):

$$H_q^{(0)}(x) = B^q q! \max_{s \leqslant \frac{q}{2}} \frac{x^{q-2s}}{s!\,(q-2s)!}. \tag{9.4}$$

Полагая $s = \rho q$; $0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2}$, находим для (9.4) оценку:

$$B \exp q \Big(B + (1-2\rho)\Big(\Big(\frac{1}{2} - \mu_1\Big)\ln n + \ln \zeta\Big) - \rho \ln q - (1-2\rho)\ln q + \\ + \ln q - \rho \ln \rho - (1-2\rho)\ln(1-2\rho)) = \\ = B \exp q\,(B + (1-2\rho))\Big(\Big(\frac{1}{2} - \mu_1\Big)\ln n + \ln \zeta\Big) - \rho \ln q - (1-2\rho)\rho n\, q + \ln q).$$

Это следует умножить на

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^q = \exp\Big(-\frac{q}{2}\ln n\Big) \tag{9.5}$$

и на

$$\frac{\chi_q}{q!} = B \exp(\mu_1 q \ln n). \tag{9.6}$$

В итоге находим оценку:

$$B \exp q\,\Big(B + (1-2\rho)\Big(\frac{1}{2} - \mu_1\Big)\ln n - \Big(\frac{1}{2} - \mu_1\Big)\ln n + \rho \ln q + \ln \zeta (1-2\rho)\Big) = \\ = B \exp q\,(B + \ln \zeta (1-2\rho) - \rho \ln K_1). \tag{9.7}$$

Если $\rho \leqslant \frac{1}{4}$, то при достаточно малом ζ, $|\ln \zeta (1-2\rho)|$ — достаточно велико; при $\rho > \frac{1}{4}$ и достаточно большом K_1 — достаточно велико $\rho \ln K_1$. Таким образом, при $q = r$ для суммы членов в (8.9), отвечающих $C_2 \leqslant r \leqslant m$, имеем оценку

$$Be^{-x^2/2} \exp(-C_3). \tag{9.8}$$

Рассмотрим теперь члены (8.9), где

$$s_0 + 4 \leqslant r \leqslant C_2. \tag{9.9}$$

Для них получится оценка:

$$Be^{-x^2/2} \sum_{r\ s_0+4}^{C_2} \frac{\chi_r}{r!}\Big(\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)^r = Be^{-x^2/2}\Big(\frac{x n^{\mu_1}}{\sqrt{n}}\Big)^{s_0+4}. \tag{9.10}$$

Наконец, при $r = s_0 + 3$, имеем:

$$\frac{\chi_{s_0+3}}{(s_0+3)!} H^{(0)}_{s_0+3}(x) e^{-x^2/2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{s_0+3} =$$

$$= -\frac{a_0}{(s_0+3)} \Psi_{s_0+3} e^{-x^2/2} n \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{s_0+3} (1 + o(1)), \tag{9.11}$$

при $n \to \infty$ ($a_0 > 0$ константа).
Поэтому имеем из (8.9)

$$pz_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} + \frac{a_0}{(s_0+3)!} \Psi_{s_0+3} e^{-x^2/2} n \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{s_0+3} (1 + o(1)) +$$

$$+ Be^{-x^2/2} \left(\frac{xn^{\mu_1}}{\sqrt{n}}\right)^{s_0+4} + R_2, \tag{9.12}$$

где R_2 имеет оценку (8.3).

10. Пусть

$$0 < x < \frac{n^{1/2-\mu_1}}{\rho_1(n)} = \frac{n^{\alpha_1}}{\rho_1(n)}. \tag{9.13}$$

Имеем:

$$n \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{s_0+3} = Bn \cdot n^{-\frac{s_0+3}{2}} \frac{1}{(\rho_1(n))^{s_0+3}} = \frac{B}{(\rho_1(n))^{s_0+3}}; \left(\frac{xn^{\mu_1}}{\sqrt{n}}\right)^{s_0+4} = B \cdot \frac{1}{(\rho_1(n))^{s_0+4}}.$$

Ввиду этого, из (9.12) следует, что зона $\left[0, \frac{n^\alpha}{\rho_1(n)}\right]$ будет з. р. л. н. п.

Совершенно аналогично, $\left[-\frac{n^\alpha}{\rho_1(n)}, 0\right]$ будет з. р. л. н. п.

Если $\alpha_1 = \alpha$, $s_0 + 3 = s + 3$ и $\Psi_{s+3} = 0$, то мы видим, что зоны $\left[0, \frac{n^\alpha}{\rho_1(n)}\right]$ и $\left[-\frac{n^\alpha}{\rho_1(n)}, 0\right]$ суть з. р. л. н. п. Если же $\alpha > \alpha_1$ и $\Psi_{s_0+3} \neq 0$, мы можем вывести из (9.12), что $[0, n^\alpha]$ не будет з. р. л. н. п. В самом деле, если это не так, то, ввиду того, что $\alpha_1 < \alpha$, зона $[0, n^{\alpha_1}]$ должна быть з. р. л. н. п. Положим:

$$x = \zeta n^{1/2-\mu_1} = \zeta n^{\alpha_1}, \tag{10.1}$$

где ζ достаточно малая (соответственно предыдущему: см. (9.2)), положительная константа. Из (9.11) находим:

$$Pz_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} + \frac{a_0}{s_0+3} \Psi_{s_0+3} e^{-x^2/2} \zeta^{s_0+3} (1 + \gamma_1) + R_2, \tag{10.2}$$

где $|\gamma_1| < \frac{1}{2}$. Отсюда видно, что, в силу $\Psi_{s_0+3} \neq 0$, зона $[0, n^\alpha]$ не может быть з. р. л. н. п.

Случай, когда в (5.2) появляется знак равенства, трактуется совершенно так же; надлежит лишь рассматривать $\Psi_3, \Psi_4, \ldots, \Psi_{s+2}$. Случай, $\alpha < \frac{1}{6}$ также ясен из предыдущих рассуждений.

Таким образом, если $[0, n^\alpha]$; $[-n^\alpha, 0]$ суть з. р. л. н. п., то семиинварианты $\varkappa_3, \varkappa_4, \ldots, \varkappa_{s+3}$ должны все исчезать; как известно, отсюда следует, что моменты $\mu_3, \mu_4, \ldots, \mu_{s+3}$ должны совпадать с нормальными. Это доказывает теорему 2. Теорема 1 легко следует из нее: в условиях теоремы

1, ссылаясь на теорему 2, мы получаем, что все семиинварианты X_j, начиная с третьего, исчезают, т. е. все моменты совпадают с нормальными.

Так как в данном случае решение проблемы моментов единственно, то все X_j должны быть нормальными.

11. Переходим к интегральным предельным теоремам. Будем доказывать теорему 3. Имеем: $\alpha < \frac{1}{6}$. Примем необходимое условие в форме (5.1), будем считать $\sigma = 1$.

Пусть $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$; при каждом n введем вспомогательное нормальное слагаемое, полагая

$$Y_n \in N(0, n^\alpha) \text{ с х.ф. } \Psi_n(t) = \exp\left(-\frac{n^{2\alpha}}{2} t^2\right).$$

Положим:

$$Z_n' = \frac{S_n + Y_n}{\sqrt{n}}. \tag{11.1}$$

Пусть:

$$1 \leqslant x \leqslant \frac{n^\alpha}{\rho(n)}. \tag{11.2}$$

Покажем, что если (11.2) есть з. н. п. для величин Z_n', то она будет и з. н. п. для величин $\frac{S_n}{\sqrt{n}} = Z_n$.

Имеем:

$$\frac{Y_n}{\sqrt{n}} \in N(0, n^{\alpha - 1/2}). \tag{11.3}$$

Далее:

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} + \frac{Y_n}{\sqrt{n}} > x\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\left|\frac{Y_n}{\sqrt{n}}\right| \leqslant n^{2\alpha - \frac{1}{2}}\right) \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} + \frac{Y_n}{\sqrt{n}} > x \,\middle|\, \left|\frac{Y_n}{\sqrt{n}}\right| \leqslant n^{2\alpha - \frac{1}{2}}\right) +$$

$$+ \mathbf{P}\left(\left|\frac{Y_n}{\sqrt{n}}\right| > n^{2\alpha - \frac{1}{2}}\right) \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} + \frac{Y_n}{\sqrt{n}} > x \,\middle|\, \left|\frac{Y_n}{\sqrt{n}}\right| > n^{2\alpha - \frac{1}{2}}\right). \tag{11.4}$$

Кроме того, в силу (11.3)

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{Y_n}{\sqrt{n}}\right| > n^{2\alpha - \frac{1}{2}}\right) = \frac{B}{n^\alpha} \exp\left(-\frac{1}{2} n^{2\alpha}\right) = o(1) \int_x^\infty e^{-u^2/2}\, du \tag{11.5}$$

при условии (11.2) и $n \to \infty$.

Ввиду этого из (11.5) заключаем:

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} + \frac{Y_n}{\sqrt{n}} > x \,\middle|\, \left|\frac{Y_n}{\sqrt{n}}\right| \leqslant n^{2\alpha - \frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} + \frac{Y_n}{\sqrt{n}} > x\right)(1 + o(1)) + o(1) \int_0^\infty e^{-u^2/2}\, du \tag{11.6}$$

при условии (11.2). При том же условии имеем:

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > x\right) \geqslant \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} + \frac{Y_n}{\sqrt{n}} > x + n^{2\alpha - \frac{1}{2}} \,\middle|\, \left|\frac{Y_n}{\sqrt{n}}\right| \leqslant n^{2\alpha - \frac{1}{2}}\right) \tag{11.7}$$

$\left(2\alpha - \frac{1}{2} < \frac{1}{3} - \frac{1}{2} < 0\right)$. Пусть теперь известно, что в условиях (11.2)

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} + \frac{Y_n}{\sqrt{n}} > x\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2}\, du.$$

Тогда из (11.6) и (11.7) находим:

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geqslant x\right) \geqslant (1 + o(1)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x + n^{2\alpha - \frac{1}{2}}}^\infty e^{-u^2/2}\, du + o(1) \int_x^\infty e^{-u^2/2}\, du. \quad (11.8)$$

Полагая $\gamma = n^{2\alpha - \frac{1}{2}}$, рассмотрим оценку:

$$\int_x^{x+\gamma} e^{-u^2/2}\, du = B\gamma \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp(x \mid \gamma \mid)(1 + o(1)). \quad (11.9)$$

Так как $\alpha < \frac{1}{6}$, то $\mid x\gamma \mid < n^{3\alpha - \frac{1}{2}} < n^{-\varepsilon_4}$; $\gamma = n^{2\alpha - \frac{1}{2}} < n^{-\alpha} < \frac{n^{-\varepsilon_5}}{x}$, и (11.9) имеет оценку:

$$\frac{B}{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) n^{-\varepsilon_5}. \quad (11.10)$$

Ввиду этого (11.8) дает:

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > x\right) \geqslant (1 + o(1)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2}\, du. \quad (11.11)$$

Заменим в (11.7) знак $\geqslant$ на $\leqslant$, и $n^{2\alpha - \frac{1}{2}}$ на $-n^{2\alpha - \frac{1}{2}}$, получим наряду с (11.11) неравенство

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > x\right) \leqslant (1 + o(1)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2}\, du. \quad (11.12)$$

Аналогично действуем для зоны $\left[-\frac{n^\alpha}{\rho(n)}, -1\right]$; в зоне $[-1,1]$ действуют классические теоремы. Итак, дело приводится к обоснованию (11.7).

12. Пусть $x_1 \in \left[1, \frac{n^\alpha}{\rho(n)}\right]$, $x_2 = n^K$, где $K > 0$ будет указано далее. Положим:

$$1 - F_n(x_2) = \mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_n + Y_n > x_2 \sqrt{n}). \quad (12.1)$$

Событие в правой части (11.8) влечет хотя бы одно из событий: $X_j > \frac{x_2}{2\sqrt{n}}$; $Y_n > \frac{x_2}{2\sqrt{n}}$. В силу (2.1) и (11.3) при достаточно большом K величина (11.8) получит оценку:

$$o(1) \int_{n^\alpha}^\infty e^{-u^2/2}\, du. \quad (12.2)$$

Имеем далее:

$$F_n(x_2) - F_n(x_1) =$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(t))^n \Psi_n(t) [\exp(-\sigma\sqrt{n}\, itx_2) - \exp(-\sigma\sqrt{n}\, itx_1)] \frac{dt}{t} \qquad (12.3)$$

При $|t| > \varepsilon_0$

$$\Psi_n(t) = B \exp\left(-\frac{n^{2\alpha}t^2}{2}\right) = B \exp\left(-\frac{n^{2\alpha}\varepsilon_0^2}{2}\right), \qquad (12.4)$$

так что с погрешностью, указанной в (12.4), можем полагать, что предел интегрирования в (12.3) будут от $-\varepsilon_0$ до ε_0. Далее имеем:

$$\left| \frac{\exp(-\sigma\sqrt{n}\, itx_2) - \exp(-\sigma\sqrt{n}\, itx_1)}{t} \right| = Bx_2\sqrt{n} = Bn^{K+\frac{1}{2}}. \qquad (12.5)$$

Отсюда получим:

$$F_n(x_2) - F_n(x_1) = \frac{i}{2\pi} \int_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} \exp\left[-\frac{1}{2}(n + n^{2\alpha})t^2\right] \Psi_n(t)(\varphi(t))^n \times$$

$$\times [\exp(-\sigma\sqrt{n}\, itx_2) - \exp(-\sigma\sqrt{n}\, itx_1)] \frac{dt}{t} + B\exp(-c_6 n^{2\alpha}).$$

Рассуждаем, как в п.п. 7 и 8, и сохраняем те же обозначения, но полагаем:

$$m = \frac{n^{2\alpha}}{\rho_0(n)}; \quad \sigma = 1, \qquad (12.6)$$

где $\rho_0(n)$ будет указано в дальнейшем. Получим:

$$F_n(x_2) - F_n(x_1) = \frac{i}{2\pi} \int_{-n^{-\mu}}^{n^{-\mu}} \exp\left[-\frac{1}{2}(n + n^{2\alpha-\frac{1}{2}})t^2\right] \left(1 + \sum_{r=3}^{m} \frac{\chi_r t^r}{r!}\right).$$

$$[\exp(-\sqrt{n}\, itx_2) - \exp(-\sqrt{n}\, itx_1)] \frac{dt}{t} + B\exp(-c_7 n^{2\alpha}). \qquad (12.7)$$

Делаем замену $\xi = t\sqrt{n}$; вместо (12.7) получим:

$$F_n(x_2) - F_n(x_1) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}(1 + n^{-2\mu})\xi^2\right] \left(1 + \sum_{r=3}^{m} \frac{\chi_r}{r!} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^r\right)$$

$$[\exp(-i\xi x_2) - \exp(-i\xi x_1)] \frac{d\xi}{\xi} + B\exp(-c_8 n^{2\alpha}). \qquad (12.8)$$

13. Положим: $\xi\sqrt{n^{-2\mu}+1} = v$; $(1 + n^{-2\mu})^{1/2} = 1 + Bn^{-2\mu} = 1 + \rho$.
Имеем:

$$F_n(x_2) - F_n(x_1) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \left(1 + \sum_{r=3}^{m} \frac{\chi_r}{r!} \frac{(v(1+\rho))^r}{(\sqrt{n})^r}\right) \times$$

$$\times [\exp(-iv x_2(1+\rho)) - \exp(-iv x_1(1+\rho))] \frac{dv}{v} + B\exp(-c_8 n^{2\alpha}). \qquad (13.1)$$

Рассмотрим результаты раскрывания скобок в (13.1). Первый член дает $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_1(1+\varrho)}^{x_2(1+\varrho)} e^{-u^2/2}\,du$. Далее:

$$x_1\rho = B\frac{n^\alpha}{\rho(n)}\,n^{-r\mu} = B\frac{n^{3\alpha-1}}{\rho(n)} = o(1).$$

Ввиду этого первый член получит вид:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_1}^{\infty} e^{-u^2/2}\,du\,(1+o(1)). \tag{13.2}$$

Перейдем к оценке следующих членов, содержащих полиномы Эрмита. Сперва рассмотрим значения r:

$$3 \leqslant r \leqslant C_1. \tag{13.3}$$

Мы должны оценить (см. п.п. 7,8):

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} H_r^{(0)}(x)\,e^{-x^2/2}\,dx. \tag{13.4}$$

При $3 \leqslant r \leqslant C_1$ (13.4) имеет оценку:

$$Bx_1^{r-1}e^{-x^2/2}. \tag{13.5}$$

Так как $\chi_r = Br!\,n^{r\mu}$ (см. (7.11)), и x подчинен (11.2), то в условиях (13.3)

$$\left|\frac{\chi_r}{r!}\frac{1}{(\sqrt{n})^r}H_r^{(0)}(x)\right| < Bx_1^{r-1}e^{-x_1^2/2}\frac{n^{r\mu}}{(\sqrt{n})^r} = \frac{B}{x_1}e^{-x_1^2/2}\left(\frac{x_1n^\mu}{\sqrt{n}}\right)^r. \tag{13.6}$$

Но

$$\left|\frac{x_1n^\mu}{\sqrt{n}}\right| < \frac{1}{\rho(n)}, \tag{13.7}$$

так что (13.6) дает:

$$\frac{B}{\rho(n)} \int\limits_{x_1}^{\infty} e^{-u^2/2}\,du. \tag{13.8}$$

Теперь пусть:

$$C_1 \leqslant r \leqslant m. \tag{13.9}$$

Будем рассматривать

$$H_r^{(0)}(x) = Br! \sum_{s \leqslant \frac{r}{2}} \frac{x^{r-2s}}{s!\,(r-2s)!}, \tag{13.10}$$

$$\int\limits_{x_1}^{\infty} e^{-x^2/2}H_r^{(0)}(x)\,dx = Br! \sum_{s \leqslant \frac{r}{2}} \frac{1}{s!\,(r-2s)!} \int\limits_{x_1}^{\infty} e^{-u^2/2}u^{r-2s}\,du. \tag{13.11}$$

Имеем три $1 \leqslant x \leqslant \frac{n^\alpha}{\rho(n)}$:

$$\int\limits_{x}^{\infty} e^{-u^2/2}u^Q\,du = B^Q e^{-x^2/2} \sum_{t=1}^{Q} x^{Q-t}Q(Q-1)\ldots(Q-t+1).$$

Полагая $Q = r - 2s$, найдем:

$$\int_x^\infty e^{-u^2/2} H_r^{(0)}(u)\,du = \frac{1}{x} e^{-x^2/2} B^r r! \sum_{s \leqslant \frac{r}{2}} \frac{1}{s!\,(r-2s)!},$$

$$\sum_{t=0}^{Q-1} x^{-Q-1-t} Q(Q-1)\ldots(Q-t) = \frac{1}{x} e^{-x^2/2} B^r r! \sum_{s \leqslant \frac{r}{2}} \frac{1}{s!\,(r-2s)!} \sum_{t=0}^{Q-1} x^{Q-1-t} Q^t. \tag{13.12}$$

14. Положим, как в п. 9,

$$r = q, \quad s = \rho q; \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2}; \quad Q = r(1-2\rho).$$

Для (13.12) без первых множителей получится оценка: при $1 \leqslant x \leqslant \frac{n^\alpha}{\rho(n)}$ и при данном t:

$$B \exp\{Bq + q(1-2\rho) - t - 1)(\alpha \ln n - \rho(n)) - \rho q \ln q - \rho q \ln \rho - \\ - (1-2\rho) q \ln q - q(1-2\rho)\ln(1-2\rho) + q \ln q + t \ln q + t \ln(1-2\rho)). \tag{14.1}$$

Это выражение надлежит умножить на

$$\frac{\chi_q}{q!} \frac{1}{(\sqrt{n})^q} = B \exp(-\alpha \ln n). \tag{14.2}$$

Множитель, содержащий t, здесь:

$$B \exp[t(\ln q - \alpha \ln n - \ln \rho(n))] = B \exp[t(\ln m - \alpha \ln n - \ln \rho(n))]. \tag{14.3}$$

При этом $\ln m = \alpha \ln n - \ln \rho_0(n) + \theta$; $|\theta| \leqslant 1$. Будем считать, что $\ln \rho_0(n) < \frac{1}{2} \ln \rho(n)$; тогда (14.3) получит оценку:

$$B(\rho_1(n))^{-t} \tag{14.4}$$

и суммирование (14.1) по t, при учете сказанного в п. 9, дает оценку

$$B(\rho_2(n))^{-q}. \tag{14.5}$$

Суммируя по $q \geqslant C_1$, получим оценку $B(\rho_2(n))^{-1}$. Это дает нам погрешность, которую следует добавить к (13.2) в виде

$$o(1) \int_{x_1}^\infty e^{-u^2/2}\,du. \tag{14.6}$$

Аналогично рассматриваются зоны $\left[-\frac{n^\alpha}{\rho(n)}, -1\right]$. Этим доказана теорема 3.

Поступила в редакцию
28.6.60

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГТТИ, 1949.

[2] H. Chernoff, Large simple theory: parametric case, Ann. Math. Stat., 27 (1956), 1—22.

[3] J. Wolfowitz, Information theory for mathematicians, Ann. Math. Stat., 29 (1958), 351—356.

[4] Ю. В. Линник, Цепь Маркова в аналитической арифметике кватернионов и матриц, Вестник ЛГУ, **13** (1956), 63—68.
[5] Ю. В. Ленник, Пять лекций о некоторых вопросах теории чисел и теории вероятностей, Тр. Матем. ин-та АН Венгрии.
[6] А. Я. Хинчин, Über einen neuen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ann., **101** (1929), 745—752.
[7] Н. В. Смирнов, О вероятностях больших уклонений. Матем. сб., **40** (1933), 443—454.
[8] H. Cramer, Sur nu nouveau theoreme — limite de la theorie des probabilites. Actual sci et ind., N 736, Paris, 1938.
[9] В. В. Петров, Обобщение предельной теоремы Крамера, УМИ, **9**, 4 (1954). 196—202.
[10] В. Рихтер, Локальная предельная теорема для больших уклонений, ДАН СССР, **115**, 1 (1957), 53—56.
[11] В. Рихтер, Локальные предельные теоремы для больших уклонений, Теория вероят. и ее примен., **II**, 2 (1957), 214—229.
[12] В. Рихтер, Многомерные локальные предельные теоремы для больших уклонений, Теория вероят. и ее примен., **III**, 1 (1958), 107—114.
[13] Yu. V. Linnik, On the probability of large deviations for the sums of independent variables, Transactions of the IV Berkeley Symposium on Prob. and Stat., 1960.
[14] S. Bochner, K. Chandresekharan, Fourier Transforms, Princeton, 1949.
[15] A. Erdelyi, Higher Transcendental Functions, **II**, N 4, 1953.

LIMIT THEOREMS FOR THE SUMS OF INDEPENDENT VARIABLES TAKING INTO ACCOUNT THE BIG DEVIATIONS

Yu. V. LINNIK (*MOSCOW*)

(Summary)

1. Formulations. Simplest zones of local normal attraction. «Narrow» simplest zones of integral normal attraction.

The independent identically distributed variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, are supposed to have $\mathbf{E}(x_j) = 0$; $\mathbf{D}(x_j) = \sigma^2 < \infty$. Denote $Z_n = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{\sigma\sqrt{n}}$. Let $\Psi(n) \to \infty$ be a continuous nematorous function. The sequence of segments $[0, \Psi(n)]$ is called the zone of normal attraction (z. n. a.) of

$$\frac{\mathbf{P}(Z_n > x)}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_x^\infty e^{-n^2/2}dn} \to 1$$

for $x \in [0, \Psi(n)]$; the zones $[-\Psi(n), 0]$ as z. n. a. are defined similary. The zones $[0, n^\alpha]$; $[-n^\alpha, 0]$ ($\alpha > 0$ constant) are called simplest. The zones such that $\Psi(n) = o(n^{1/6})$ are called «narrow».

For the random variables of the class (d) (possessing a bounded continuous density) the zones $[0, \Psi(n)]$; $[-\Psi(n), 0]$ are called the zones of the local uniform normal attraction (z. l. u. n. a.) if

$$\frac{p_{Z_n}(x)}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}} \to 1$$

uniformly in x belonging to the said zones. Let $\alpha < \frac{1}{2}$. The condition:

$$\mathbf{E} \exp |x_j|^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}} < \infty \qquad (*)$$

is proved to be necessary for the zones $[0, n^\alpha]$, $[-n^\alpha, 0]$, to be z. n. a., and for $x_j \in (d)$ — to be the z. l. u. n. a. Let $\rho(n) \to$ be a given monotonic function increasing as slowly as we please then the condition (*) is sufficient for the zones $\left[0, \frac{n^\alpha}{\rho(n)}\right]$; $\left[-\frac{n^\alpha}{\rho(n)}, 0\right]$ to be the z. n. a., and for $x_j \in (d)$ to be the z. l. u. n. a. if $\alpha < \frac{1}{6}$. If $\alpha > \frac{1}{6}$, $x_j \in (d)$, a condition is given in terms of the series $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \ldots, \frac{1}{2}\frac{s+1}{s+3} \to \frac{1}{2}$ and of moments of x_j. This condition is necessary for the zones $[0, n^\alpha \rho(n)]$; $[-n^\alpha \rho(n), 0]$ to be z. l. u. n. a. and sufficient for the zones $\left[0, \frac{n^\alpha}{\rho(n)}\right]$; $\left[-\frac{n^\alpha}{\rho(n)}, 0\right]$ to be z. l. n. u. a.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том VI Выпуск 2
1961

О РЕГУЛЯРНЫХ МНОГОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССАХ

Р. Ф. МАТВЕЕВ

Многомерные стационарные процессы впервые были рассмотрены в работах Г. Крамера [1] и А. Н. Колмогорова [2]. В дальнейшем В. Н. Засухин [3] сформулировал существенные результаты по теории экстраполирования таких процессов. В недавней работе Ю. А. Розанова [4] даны полные доказательства теорем Засухина и приведен ряд новых результатов. А. М. Яглом [12] указал эффективный метод экстраполирования многомерных процессов, спектральная матрица которых состоит из дробно-рациональных функций. В работе Ю. А. Розанова [10] развита теория экстраполирования процессов ранга 1 с дискретным временем. Теория экстраполирования многомерных процессов разрабатывалась также Н. Винером и П. Мазани [5, 11]. Однако в перечисленных работах были рассмотрены процессы максимального ранга, либо процессы ранга 1, а общий случай процессов произвольного ранга оставался почти неисследованным (см., впрочем, [9] и [13]). В настоящей статье найдены необходимые и достаточные условия регулярности процессов произвольного ранга, а также исследованы вопросы экстраполирования процессов ранга 1 с непрерывным временем.

Напомним некоторые общепринятые определения. Назовем n-мерным стационарным процессом $\mathbf{x}(t)$ совокупность таких случайных комплексных функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ параметра t, что

$$\mathbf{M}x_i(t) = m_i; \quad \mathbf{M}[x_i(t+\tau)\,\overline{x_j(t)}] = B_{ij}(\tau).$$

Мы будем считать, что t принимает произвольные вещественные значения. Без ограничения общности положим в дальнейшем $m_i = 0$. Функции $B_{ij}(\tau)$ $(i, j = \overline{1, n})$ образуют корреляционную матрицу $B(\tau)$. Известно (см. [2, 3, 4]), что компоненты процесса $\mathbf{x}(t)$ можно рассматривать как кривые в гильбертовом пространстве H случайных величин с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией. Скалярное произведение в H определено следующим образом:

$$(x, y) = \mathbf{M}x\bar{y},$$

Поэтому, $B_{ij}(\tau) = (x_i(t+\tau), x_j(t))$. Определим некоторые важные подпространства, определяющие структуру $\mathbf{x}(t)$:

$$H^x(t) = \bigvee_{k=1}^{n} \{x_k(\tau);\ \tau \leqslant t\}; \quad H^x = \bigvee \{H^x(t);\ -\infty < t < \infty\},$$

$$H_k^x(t) = \bigvee \{x_k(\tau);\ \tau \leqslant t\}; \quad H_k^x(t) = \bigvee \{H_k^x(t);\ -\infty < t < \infty\}.$$

Процесс $\mathbf{x}(t)$ *называется регулярным, если* $S^x \equiv \bigcap_t H^x(t) = 0$, *и сингулярным, если* $S^x = H^x$.

Все остальные процессы можно отнести к смешанному типу. Важнейшими процессами являются регулярные и сингулярные, поскольку (см. [7] теорема 1) любой многомерный стационарный процесс $\mathbf{x}(t)$ представим в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t) \oplus \mathbf{s}(t),$$

где $\mathbf{r}(t)$ регулярен, $\mathbf{s}(t)$ сингулярен и

$$H^x(t) = H^r(t) \oplus H^s.$$

Стационарный процесс $\mathbf{x}(t)$ допускает спектральное разложение

$$x_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dZ_k^x(\lambda); \quad k = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где $Z_k^x(\lambda)$ — случайные процессы с некоррелированными приращениями такие, что

$$\mathbf{M}\left\{\int_{\Lambda_1} dZ_k^x(\lambda) \cdot \overline{\int_{\Lambda_2} dZ_j^x(\lambda)}\right\} = F_{kj}^x(\Lambda_1 \cap \Lambda_2); \; k, j = \overline{1, n},$$

$F_{kj}^x(\cdot)$ — комплексные ограниченные меры на действительной прямой, которые называются спектральными мерами процесса $\mathbf{x}(t)$ и образуют матрицу $F_x(\Lambda)$ спектральных мер. Имеет место равенство

$$B_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} F_x(d\lambda).$$

Как уже указывалось в [13], при выявлении вопроса о регулярности и сингулярности процесса, а также для решения задачи экстраполирования достаточно ограничиться процессами, спектральные меры которых абсолютно непрерывны. В дальнейшем это свойство мер будет предполагаться без оговорок.

Обозначим через $f_{kj}^x(\lambda)$ производную меры $F_{kj}^x(\Lambda)$ и назовем $f_x(\lambda) = \|f_{kj}^x(\lambda)\|$ спектральной матрицей.

§ 1. Условия регулярности для процессов произвольного ранга

Определение 1 (см. [4]). Будем говорить, что стационарный процесс $\mathbf{x}(t)$ имеет ранг m, если ранг спектральной матрицы $f_x(\lambda)$ равен m почти всюду.

В [4] доказано (теорема 8), что регулярные процессы обязательно являются процессами некоторого ранга; в [3] выведены необходимые и достаточные условия регулярности процессов максимального ранга ($m = n$), а в [10] и [11] сделано то же для процессов ранга 1 (во всех этих работах рассматривались лишь процессы с дискретным временем, хотя из результатов [7] вытекает, что это не является большим ограничением общности).

В [9] указаны необходимые и достаточные условия регулярности процессов произвольного ранга m (также для дискретного времени). Ниже мы

выведем эти условия для непрерывного времени. Предварительно дадим определение некоторых классов аналитических функций.

Определение 2 (см. [8]). Функция $f(z)$ аналитическая в некоторой области D комплексной плоскости, принадлежит к классу H_δ в этой области, если субгармоническая функция $|f(z)|^\delta$ имеет в D гармоническую мажоранту.

Определение 3. Функция $f(z)$, аналитическая в нижней полуплоскости, принадлежит к классу B_δ, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-iy)|^\delta dx \leqslant M(f;\delta) < \infty; \quad y > 0.$$

Определение 4. Функция $g(z)$, аналитическая в нижней полуплоскости, принадлежит классу N_δ, если $g(z) = f_1(z)/f_2(z)$, где f_1 и f_2 — функции класса H_δ в нижней полуплоскости.

Класс H_δ для полуплоскости изучен В. И. Крыловым [8]. Им доказано, что при конформном преобразовании области D в область D_1 функции класса H_δ в D переходят в функции класса H_δ в D_1. Доказано также, что

$$H_{\delta_1} \subseteq H_{\delta_2}, \text{ если } 0 < \delta_2 < \delta_1. \tag{2}$$

Согласно теореме 1 этой работы

$$B_\delta \subseteq H_\delta, \tag{3}$$

а из теорем 8 и 9 выводим, что можно считать функции f_1 и f_2 из определения 4 принадлежащими классу B_δ: класс N_δ от этого не изменится. Кроме того:

$$N_{\delta_1} \subseteq N_{\delta_2}, \text{ если } 0 < \delta_2 < \delta_1. \tag{4}$$

В дальнейшем (если не оговорено противное) мы будем вместо слов «класс H_δ в нижней полуплоскости» писать просто «класс H_δ».

Теорема 1. *Для того чтобы стационарный процесс* $\mathbf{x}(t)$ *ранга* m *был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

(I) *Существует главный минор* $M(\lambda)$ *порядка* m *матрицы* $f_x(\lambda)$ *такой, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log M(\lambda)}{1+\lambda^2} d\lambda > -\infty \tag{5}$$

(*для определенности далее полагаем* $M(\lambda) = \|f^x_{kl}(\lambda)\|$; $k, l = \overline{1, m}$).

(II) *Функции*

$$\theta_{ik}(\lambda) = M_{ik}(\lambda)/M(\lambda); \quad i = \overline{m+1, n}; \quad k = \overline{1, m}, \tag{6}$$

(*где* M_{ik} *— определители матриц, которые получаются заменой в миноре* M *k-й строки* $\{f^x_{k1}(\lambda), \ldots, f^x_{kn}(\lambda)\}$ *на строку* $\{f^x_{i1}(\lambda), \ldots, f^x_{in}(\lambda)\}$) *являются граничными значениями функций* $\Theta_{ik}(z)$ ($\theta_{ik}(\lambda) = \lim\limits_{\mu \to +0} \Theta_{ik}(\lambda - i\mu)$) *класса* N_δ *при некотором* $\delta > 0$.

Доказательство. Необходимость. Допустим, что $\mathbf{x}(t)$—регулярный процесс ранга m. Тогда (см. [4], стр. 139) сумма главных миноров порядка m его спектральной матрицы отлична от нуля почти всюду. Так как таких миноров конечное число, то найдется хотя бы один — $M(\lambda)$,

отличный от нуля на множестве положительной меры. Пусть, для определенности, его матрица равна $\| f^x_{kl}(\lambda) \|$; $k, l = \overline{1, m}$. Процесс $\mathbf{x}^{(1)}(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$, конечно, регулярен, и, в силу теоремы 3 работы [7], его спектральная матрица имеет постоянный ранг почти всюду. Следовательно, $M(\lambda) > 0$ почти всюду и $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ — регулярный процесс ранга m. Условие (5) вытекает из теоремы 4 работы [7].

Далее, поскольку ранги матриц $f_x(\lambda)$ и $\{f^x_{kl}(\lambda)\}$ $k, l = \overline{1, m}$ равны m почти всюду и эти матрицы являются эрмитовыми, то нетрудно доказать существование функций $\theta_{ik}(\lambda)$; $i = \overline{m+1, n}$; $k = \overline{1, m}$ таких, что для почти всех λ имеют место равенства:

$$\left.\begin{aligned} f^x_{ij}(\lambda) &= \sum_{l,k=1}^{m} \theta_{ik}(\lambda)\, \overline{\theta_{jl}(\lambda)}\, f^x_{kl}(\lambda);\ i, j = \overline{m+1, n}, \\ f^x_{ik}(\lambda) &= \sum_{l=1}^{m} \theta_{il}(\lambda)\, f^x_{lk}(\lambda);\ i = \overline{m+1, n};\ k = \overline{1, m}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Отсюда и из теоремы 6 работы [4] следует, что процессу $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ подчинен процесс $\mathbf{x}^{(2)}(t) = (x_{m+1}(t), \ldots, x_n(t))$, причем

$$x_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \sum_{l=1}^{m} \theta_{il}(\lambda)\, dZ^x_l(\lambda);\ i = \overline{m+1, n} \tag{8}$$

(см. (1)). Так как $M(\lambda) > 0$ почти всюду, то из (7) получаем $\theta_{il}(\lambda) = M_{il}(\lambda)/M(\lambda)$, где M_{il} и M определены выше. Из теоремы 2 работы [7] следует, что имеет место представление:

$$x_j(t) = \sum_{p=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \varphi_{jp}(\lambda)\, d\beta_p(\lambda);\ j = \overline{1, n} \tag{9}$$

здесь $\beta_p(\lambda)$; $p = \overline{1, m}$ — процессы с некоррелированными приращениями такие, что

$$M\{[\beta_p(\lambda + \Delta\lambda) - \beta_p(\lambda)]\, \overline{[\beta_q(\lambda + \Delta\lambda) - \beta_q(\lambda)]}\} = \delta_{pq}\, \Delta\lambda,$$

где δ_{pq} — символ Кронекера. При этом $\varphi_{jp}(\lambda)$ являются предельными для функций $\Gamma_{jp}(z)$ класса B_2, поскольку их преобразования Фурье обращаются в нуль на отрицательной полуоси. Формулы (1), (8), (9) позволяют заключить, что

$$\varphi_{lp}(\lambda) = \sum_{l=1}^{m} \theta_{il}(\lambda)\, \varphi_{lp}(\lambda);\ i = \overline{m+1, n};\ p = \overline{1, m}. \tag{10}$$

Определитель $\widetilde{M}(\lambda) = \det \| \varphi_{pq}(\lambda) \|$; $p, q = 1, m$ отличен от нуля почти всюду, ибо, как легко видеть, $|\widetilde{M}(\lambda)|^2 = M(\lambda)$ (ср. [8], теорема 3), следовательно $\theta_{il}(\lambda) = \widetilde{M}_{il}(\lambda)/\widetilde{M}(\lambda)$; $i = \overline{m+1, n}$; $l = \overline{1, m}$, где $\widetilde{M}_{il}$ — определители матриц, которые получаются из матрицы $\| \varphi_{qp}(\lambda) \|$; $p, q = \overline{1, m}$ заменой l-й строки на строку, элементами которой являются $\varphi_{i1}(\lambda), \ldots, \varphi_{im}(\lambda)$. Ясно, что $\widetilde{M}_{il}(\lambda)$ и $\widetilde{M}(\lambda)$ являются граничными значениями для функций класса $B_{2/m}$ (ср. [4], стр. 129), так что условие (II) теоремы выполнено при $\delta = 2/m$. Необходимость условий теоремы, таким образом, доказана.

Достаточность. Пусть условия теоремы выполнены. Без ограничения общности в (II) можно положить $\delta \leqslant 2$. В силу результатов работ [3] и [7], $\mathbf{x}^{(1)}(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$ — регулярный процесс ранга m, причем имеет место представление

$$x_l(t) = \sum_{p=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \varphi_{lp}(\lambda)\, d\beta_p(\lambda); \quad l = \overline{1, m}, \tag{11}$$

где $\varphi_{lp}(\lambda)$ — граничные значения функций $\Gamma_{lp}(z)$ класса B_2, а $\beta_p(\lambda)$ определяются так же, как в формуле (9). Из свойств классов B_δ и H_δ и в силу условия $\delta \leqslant 2$ можем заключить, что $\Gamma_{lp}(z) \in B_2 \subseteq H_2 \subseteq H_\delta$. Функции $\Theta_{jk}(z)$ входят в класс N_δ и, следовательно, имеют вид ([8], теорема 8):

$$\Theta_{jk}(z) = \frac{B_{jk}^{(1)}(z)\, d(\gamma_{jk}^{(1)}; z)\, g_{jk}^{(1)}(z) \exp\{i(\alpha_{jk} + \beta_{jk} z)\}}{B_{jk}^{(2)}(z)\, d(\gamma_{jk}^{(2)}; z)\, g_{jk}^{(2)}(z)}, \tag{12}$$

где α_{jk}, β_{jk} — действительные числа, $B_{jk}^{(q)}(z)$; $q = 1, 2$ — произведения Бляшке

$$B_{jk}^{(q)}(z) = \prod_m \left\{ \frac{z - z_{ajk}^{(m)}}{z - z_{qjk}^{(m)}} \cdot \frac{|z_{qjk}^{(m)} + i|}{z_{qjk}^{(m)} + i} \cdot \frac{|z_{qjk}^{(m)} - i|}{z_{qjk}^{(m)} - i} \right\}, \tag{13}$$

$\{z_{qjk}^{(m)}\}_{m=1,2,\ldots}$ — конечная или бесконечная последовательность чисел таких, что $\operatorname{Im} z_{qjk}^{(m)} < 0$ для всех m и

$$\sum_m \frac{|\operatorname{Im} z_{qjk}^{(m)}|}{1 + |z_{qjk}^{(m)}|} < \infty.$$

Функция $d(f; z)$ определяется формулой

$$d(f; z) = \exp\left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \lambda z}{\lambda - z} \cdot \frac{\log |f(\lambda)|}{1 + \lambda^2}\, d\lambda \right\}, \tag{13'}$$

$\gamma_{jk}^{(1)}(\lambda)$ и $\gamma_{jk}^{(2)}(\lambda)$ обладают свойствами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma_{jk}^{(q)}(\lambda)|^\delta}{1 + \lambda^2}\, d\lambda < \infty; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log |\gamma_{jk}^{(q)}(\lambda)||}{1 + \lambda^2}\, d\lambda < \infty; \quad q = 1, 2. \tag{13''}$$

Наконец,

$$g_{jk}^{(q)}(z) = \exp\left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \lambda z}{\lambda - z}\, d\sigma_{jk}^{(q)}(\lambda) \right\}; \quad q = 1, 2,$$

где $\sigma_{jk}^{(q)}(\cdot)$ — конечная сингулярная мера. Пусть $D(z) = e^{-\beta z} \prod_{j=m+1}^{n} \prod_{k=1}^{m} B_{jk}^{(2)}(z) \times$ $\times g_{jk}^{(2)}(z)$, где $\beta = \max_{\substack{j=\overline{m+1,n} \\ k=\overline{1,m}}} \{0; \beta_{jk}\}$. Функция $D(z)$ аналитична в нижней полуплоскости и $\lim_{\mu \to +0} |D(\lambda - i\mu)| \equiv |D(\lambda)| = 1$ почти всюду (см. [8]). Поэтому в силу (11) для всех l от 1 до m

$$x_l(t) = \sum_{p=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \varphi_{lp}(\lambda)\, d\beta_p(\lambda) =$$

$$= \sum_{p=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} [\varphi_{lp}(\lambda) D(\lambda)] [\overline{D(\lambda)} d\beta_p(\lambda)] = \sum_{p=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \psi_{lp}(\lambda) d\hat{\beta}_p(\lambda), \quad (14)$$

где по определению

$$\psi_{lp}(\lambda) = \varphi_{lp}(\lambda) D(\lambda); \; d\beta_p(\lambda) = \overline{D(\lambda)} d\beta_p(\lambda); \; p, l = \overline{1, m} \quad (14')$$

($\psi_{lp}(\lambda)$ и $\hat{\beta}_p(\lambda)$ имеют те же свойства, что и $\psi_{lp}(\lambda)$ и $\beta_p(\lambda)$ в формуле (11)).

Далее, как и при доказательстве необходимости, устанавливается справедливость соотношений (8), и поэтому

$$x_j(t) = \sum_{p=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \sum_{l=1}^{m} \theta_{jl}(\lambda) \psi_{lp}(\lambda) d\hat{\beta}_p(\lambda) =$$

$$= \sum_{p=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \psi_{jp}(\lambda) d\hat{\beta}_p(\lambda); \; j = \overline{m+1, n}, \quad (15)$$

где

$$\psi_{jp}(\lambda) = \sum_{l=1}^{m} \theta_{jl}(\lambda) \psi_{lp}(\lambda); \; j = \overline{m+1, n}; \; p = \overline{1, m}. \quad (15')$$

Таким образом, $f_{jj}(\lambda) = \sum_{p=1}^{m} |\psi_{jp}(\lambda)|^2$; $j = \overline{m+1, n}$ и, следовательно, $\psi_{jp}(\lambda) \in$

$\in L^2(-\infty, \infty)$. В силу выбора функций $\psi_{jp}(\lambda)$; $j, p = \overline{1, m}$ ясно, что $\psi_{jp}(\lambda)$; $j = \overline{m+1, n}$; $p = 1, m$ являются граничными значениями некоторых функций $\Psi_{jp}(z)$, аналитических в нижней полуплоскости и определяющихся равенствами (см. (15'), (14')):

$$\Psi_{jp}(z) = \sum_{k=1}^{m} \Theta_{jk}(z) \Gamma_{kp}(z) D(z) \quad (16)$$

(определение функций $\Gamma_{kp}(z)$ дано в объяснении к формуле (11)). С другой стороны, из (12) и определения $D(z)$ выводим, что

$$\Theta_{jk}(z) D(z) = \Gamma_{jk}^{(2)}(z) / d(\gamma_{jk}^{(2)}; z); \; j = \overline{m+1, n}; \; k = \overline{1, m},$$

где $\Gamma_{jk}^{(2)}(z)$ — некоторая функция класса H_δ, а $d(f; z)$ определена формулой (13'); следовательно,

$$\Psi_{jp}(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\Gamma_{jk}^{(2)}(z) \Gamma_{kp}(z)}{d(\gamma_{jk}^{(2)}; z)} = \frac{A_{jp}(z)}{d(\gamma_j; z)}. \quad (17)$$

Здесь $\gamma_j(\lambda) = \prod_{k=1}^{m} \gamma_{jk}^{(2)}(\lambda)$ и $A_{jp}(z) = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{jk}^{(2)}(z) \Gamma_{kp}(z) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m} d(\gamma_{jl}^{(2)}; z)$.

Функции $A_{jp}(z)$ являются суммами функций, каждая из которых есть произведение $m+1$ функций класса H_δ, поэтому (см. [4], стр. 129)

$$A_{jp}(z) \in H_{\delta/m+1}; \quad j = \overline{m+1, n}; \; p = \overline{1, m}. \quad (18)$$

По той же причине

$$d(\gamma_j; z) \in H_{\delta/m} \subseteq H_{\delta/m+1}. \tag{19}$$

Из формул (17)—(19) выводим, что $\Psi_{jp}(z) \in N_{\delta/m+1}$ и поэтому, в силу (17), (18), а также в силу теоремы 8 работы [8]

$$\Psi_{jp}(z) = \widetilde{B}_{jp}(z)\, d(\gamma_{jp}/\gamma_j; z)\, \widetilde{g}_{jp}(z) \exp\{i(\widetilde{\alpha}_{jp} - \widetilde{\beta}_{jp} z)\}, \tag{19'}$$

где $\beta_{jp} > 0$; остальные сомножители определяются так же, как и в формуле (12). В частности, $\gamma_{jp}(z)$ и $\gamma_j(z)$ удовлетворяют соотношениям (13″) и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \log \left| \frac{\gamma_{jp}(\lambda)}{\gamma_j(\lambda)} \right| \right| \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} < \infty. \tag{19''}$$

Кроме того, как следует из [8],

$$|\Psi_{jp}(\lambda - i\mu)| \to |\gamma_{jp}(\lambda)|/|\gamma_j(\lambda)|; \ (\mu \to +0),$$

т. е.

$$|\gamma_{jp}(\lambda)|/|\gamma_j(\lambda)| = |\psi_{jp}(\lambda)| \in L^2(-\infty, \infty).$$

Отсюда с помощью теоремы 9 работы [8] и формул (19′), (19″) устанавливаем, что $\Psi_{jp}(z) \in B_2$; $j = m+1, n$; $p = \overline{1, m}$. Итак,

$$x_j(t) = \sum_{p=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \psi_{jp}(\lambda)\, d\hat{\beta}_p(\lambda); \ j = \overline{1, n},$$

где все $\psi_{jp}(\lambda)$ являются граничными значениями функций класса B_2, т. е. их преобразования Фурье обращаются в нуль на отрицательной полуоси. Это влечет за собой регулярность процесса $\mathbf{x}(t)$. Теорема доказана.

§ 2. Процессы ранга 1

Необходимые и достаточные условия регулярности процессов ранга 1 известны из теоремы 1. Нетрудно доказать (см., например, [10], теорема 1), что процессы ранга 1 бывают только либо регулярными, либо сингулярными. Следовательно, необходимые и достаточные условия сингулярности таких процессов также становятся известными. Задачу экстраполирования поэтому нужно решать лишь для регулярных процессов. Для процессов с дискретным временем эта задача полностью решена Розановым в [10]. Пользуясь идеями этой работы и результатами [7], мы построим аналог решения задачи для непрерывного времени.

Пусть $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$—$n$-мерный регулярный процесс ранга 1. Согласно теореме 2 работы [7] имеет место представление

$$x_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \varphi_j(\lambda)\, d\beta(\lambda) = \int_{-\infty}^{t} c_j(t-p)\, dr(p) \quad (j = \overline{1, n}), \tag{20}$$

где $c_j(t)$, $r(p)$ — суть преобразования Фурье соответственно для $\varphi_j(\lambda)$, $\beta(\lambda)$; $\beta(\lambda)$ — процесс с некоррелированными приращениями такой, что

$\mathbf{M}\left\{\int\limits_{\Lambda_1} d\beta(\lambda)\cdot\overline{\int\limits_{\Lambda_2} d\beta(\lambda)}\right\}=\mu(\Lambda_1\cap\Lambda_2)$; $\mu(\cdot)$ — лебеговская мера. Функции $\varphi_j(\lambda)$ являются предельными для функций класса B_2 и удовлетворяют системе:

$$\left.\begin{aligned}
|\varphi_1(\lambda)|^2 &= f_{11}^x(\lambda),\\
\varphi_2(\lambda) &= \frac{f_{21}^x(\lambda)}{f_{11}^x(\lambda)}\varphi_1(\lambda),\\
&\cdots\cdots\\
\varphi_n(\lambda) &= \frac{f_{n1}^x(\lambda)}{f_{11}^x(\lambda)}\varphi_1(\lambda).
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

В дальнейшем решением системы (21) будем называть совокупность таких функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$, которые являются предельными для функций соответственно $\Gamma_1(z),\ldots,\Gamma_n(z)$ класса B_2.

В силу теоремы 1 настоящей работы, отношения $\dfrac{f_{j1}^x(\lambda)}{f_{11}^x(\lambda)}$; $j=\overline{1,n}$ являются граничными значениями функций $\Theta_j(z)$ класса N_2:

$$\frac{f_{j1}^x(\lambda)}{f_{11}^x(\lambda)}=\lim_{\mu\to+0}\Theta_j(\lambda-i\mu),$$

$\Theta_j(z)$ как функция класса N_2 разлагается на множители:

$$\Theta_j(z)=\frac{B_{1j}(z)}{B_{2j}(z)}\cdot d\left(\frac{\gamma_{1j}}{\gamma_{2j}},z\right)\cdot g_j(z)\,e^{i(\alpha_j+\beta_j z)}. \tag{22}$$

Здесь все функции, кроме $g_j(z)$, определяются, как и выше (см. (12)), а

$$g_j(z)=\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\lambda z}{\lambda-z}\sigma_j(d\lambda)\right\},$$

где $\sigma_j(\cdot)$ — конечная сингулярная обобщенная мера.

Из представления (20) для $\mathbf{x}(t)$ следует, что $H^x(t)\subseteq H^{\Delta r}(t)$. Для теории экстраполирования важно найти процесс $r(p)$ так, чтобы выполнялось условие

$$H^x(t)=H^{\Delta r}(t). \tag{23}$$

Очевидно, что это зависит от того, какие именно функции $\varphi_j(\lambda)$ для представления (20) мы возьмем из тех, которые удовлетворяют системе (21). Поэтому необходимо выяснить, какими характеристическими свойствами обладают функции $\varphi_j(\lambda)$, определяющие представление (20) со свойством (23).

Рассмотрим два разложения процесса $\mathbf{x}(t)$:

$$\left.\begin{aligned}
x_j(t) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\varphi_j(\lambda)\,d\beta(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{t} c_j(t-p)\,dr(p),\\
x_j(t) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\hat{\varphi}_j(\lambda)\,d\hat{\beta}(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{t}\hat{c}_j(t-p)\,d\hat{r}(p),
\end{aligned}\right\}\quad (j=\overline{1,n}), \tag{24}$$

причем

$$H^x(t) = H^{\Delta r}(t) \subseteq H^{\hat{\Delta r}}(t). \tag{25}$$

Лемма. *Если*

$$\varphi_j(\lambda) = \lim_{\mu \to 0} \Gamma_j(\lambda - i\mu); \quad \hat{\varphi}_j(\lambda) = \lim_{\mu \to 0} \hat{\Gamma}_j(\lambda - i\mu); \quad \Gamma_j(z) \in B_2; \quad \hat{\Gamma}_j(z) \in B_2,$$

то

$$|\Gamma_j(z)| \geqslant |\hat{\Gamma}_j(z)| \quad \textit{для } \operatorname{Im} z < 0; \quad j = \overline{1, n}.$$

Доказательство. Введем несколько новых процессов

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \frac{d\beta(\lambda)}{\lambda - i} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dZ_y(\lambda)$$

$$\hat{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \frac{d\hat{\beta}(\lambda)}{\lambda - i} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dZ_{\hat{y}}(\lambda)$$

$$x_j^1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dZ_j^1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \frac{dZ_j^x(\lambda)}{\lambda - i} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \varphi_j(\lambda) dZ_y(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \hat{\varphi}_j(\lambda) dZ_{\hat{y}}(\lambda).$$

Имеем очевидную цепь равенств

$$H^y(t) = H^{\Delta r}(t) = H^x(t) = H^{x'}(t) \tag{26}$$

и

$$H^{\hat{y}}(t) = H^{\hat{\Delta r}}(t) \supseteq H^x(t) = H^{x'}(t). \tag{26'}$$

Далее, пусть

$$Z_y\left(\operatorname{tg} \frac{\mu}{2}\right) = u(\mu); \quad Z_{\hat{y}}\left(\operatorname{tg} \frac{\mu}{2}\right) = \hat{u}(\mu); \quad Z_j'\left(\operatorname{tg} \frac{\mu}{2}\right) = u_j(\mu)$$

$$v(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\mu} du(\mu); \quad \hat{v}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\mu} d\hat{u}(\mu). \tag{27}$$

Легко видеть, что спектральные плотности процессов $v(n)$ и $\hat{v}(n)$ равны 1, следовательно, эти процессы являются некоррелированными, т. е. $\mathbf{M}\{v(n)\overline{v(k)}\} = 2\pi\delta_{nk}$; аналогично для $\hat{v}(n)$. Обозначим

$$\hat{x}_j(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\mu} du_j(\mu) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\mu} \varphi_j\left(\operatorname{tg} \frac{\mu}{2}\right) du(\mu) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\mu} \hat{\varphi}_j\left(\operatorname{tg} \frac{\mu}{2}\right) d\hat{u}(\mu); \quad (j = \overline{1, n}). \tag{28}$$

Вернемся к функциям $\Gamma_j(z)$, $\hat{\Gamma}_j(z)$; $j = \overline{1, n}$; $z = \lambda - i\mu$; $\mu > 0$. Произведем

конформное преобразование нижней полуплоскости во внутренность единичного круга:

$$z = \lambda - i\mu = -i\frac{1-w}{1+w}, \quad \text{где} \quad w = \rho e^{-i\varphi}; \quad \rho < 1.$$

Обозначим $\Phi_j(w) = \Gamma_j\left(-i\frac{1-w}{1+w}\right)$; аналогично $\hat{\Phi}_j(w)$. Функции $\Gamma_j(z)$, $\hat{\Gamma}_j(z)$ входят в класс B_2, следовательно, и в класс H_2 в нижней полуплоскости, а поэтому функции $\Phi_j(w)$, $\hat{\Phi}_j(w)$ входят в класс H_2 внутри единичного круга и разлагаются там в степенные ряды

$$\begin{aligned} \Phi_j(w) &= \sum_{l=0}^{\infty} c_j(l)\, w^l, \\ \hat{\Phi}_j(w) &= \sum_{l=0}^{\infty} \hat{c}_j(l)\, w^l. \end{aligned} \tag{29}$$

Нетрудно также проверить, что $\lim\limits_{\rho \to 1} \Phi_j(\rho e^{-i\varphi}) = \varphi_j\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)$; аналогично для $\hat{\Phi}_j(w)$. В таком случае из (28) следует

$$\hat{x}_j(n) = \sum_{l=0}^{\infty} c_j(l)\, v(n-l) = \sum_{l=0}^{\infty} \hat{c}_j(l)\, \hat{v}(n-l)$$

и коэффициенты $c_j(l)$, $\hat{c}_j(l)$ находятся из равенств (29).

Более того, в силу результатов [8] и соотношений (26), (26′) $H^{\hat{x}}(n) = H^{v}(n) \subseteq H^{\hat{v}}(n)$. Используя этот факт, докажем неравенство $|\Phi_j(w)| \geqslant |\hat{\Phi}_j(w)|$; $|w| < 1$; $j = \overline{1, n}$. Действительно, в силу некоррелированности каждого из процессов $v(n)$, $\hat{v}(n)$

$$c_j(l) = (\hat{x}(l),\ v(0)); \quad \hat{c}_j(l) = (\hat{x}(l),\ \hat{v}(0)).$$

Далее, $\{v(k);\ k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ есть базис пространства $H^{\hat{x}}$, следовательно, $\hat{v}(0) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha_m v(m)$. Однако $\hat{v}(0) \perp H^{\hat{x}}(-1) = H^{v}(-1)$ и $\hat{v}(0) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \alpha_m v(m)$. Поэтому

$$\hat{c}_j(l) = (\hat{x}_j(l),\ \hat{v}(0)) = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\alpha}_m\, (\hat{x}_j(l), v(m)) = \sum_{m=0}^{l} \overline{\alpha}_m c_j(l-m) = \sum_{m=0}^{l} \overline{\alpha}_{l-m} c_j(m),$$

так как $v(l+m) \perp H^{\hat{x}}(l)$; $m > 0$. Теперь

$$\hat{\Phi}_j(w) = \sum_{l=0}^{\infty} \hat{c}_j(l)\, w^l = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\alpha}_{l-m} \cdot c_j(m) \cdot w^{l-m} w^m =$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{l=m}^{\infty}\bar{\alpha}_{l-m}w^{l-m}\right\}c_j(m)w^m = \Phi_j(w)\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\bar{\alpha}_l\cdot w^l \equiv \Phi_j(w)\cdot A(w).$$

Вместе с тем $\sum_{m=0}^{\infty}|\alpha_m|^2 = \|\hat{v}(0)\| = 1$, следовательно, $A(w)$ аналитична при $|w|<1$ и так как $\lim_{\rho\to 1}|\Phi_j(\rho e^{-i\lambda})| = \lim_{\rho\to 1}|\hat{\Phi}_j(\rho e^{-i\lambda})|$, то $\lim_{\rho\to 1}|A(\rho e^{-i\lambda})| = 1$. Поэтому для $\rho<1$ $|A(\rho e^{-i\lambda})|\leqslant 1$ и $|\Phi_j(w)|\geqslant|\hat{\Phi}_j(w)|$ при $|w|<1$. Переходя к $\Gamma_j(z)$, $\hat{\Gamma}_j(z)$, получим $|\Gamma_j(z)|\geqslant|\hat{\Gamma}_j(z)|$; $\operatorname{Im} z<0$. Лемма доказана.

Итак задача экстраполирования свелась к нахождению такого решения $(\varphi_1(\lambda),\ldots,\varphi_n(\lambda))$ системы (21), чтобы для любого другого решения $\hat{\varphi}_1(\lambda),\ldots,\hat{\varphi}_n(\lambda)$ этой системы выполнялись неравенства:

$$|\Gamma_j(z)|\geqslant|\hat{\Gamma}_j(z)|;\quad \operatorname{Im} z<0;\quad j=\overline{1,n}$$

($\Gamma_j(z)$, $\hat{\Gamma}_j(z)$ определены выше). Ясно, конечно, что такое решение существует, так как для регулярного процесса всегда существует разложение $\mathbf{x}(t)$ вида (20) со свойством (23).

Из указанного ниже построения этого решения будет следовать, что оно и единственно с точностью до постоянного множителя, по модулю равного 1. Поэтому для представления $\mathbf{x}(t)$ в виде (20) с найденными $\varphi_1(\lambda),\ldots,\varphi_n(\lambda)$ будет верно соотношение (23).

Искомое решение строится следующим образом. Сначала определяем функцию $\Gamma_1(z)$ класса B_2, наибольшую по модулю среди функций $\Gamma(z)$, удовлетворяющих условиям:

(а) $\Gamma(z)\in B_2$; $\lim_{\mu\to+0}|\Gamma(\lambda-i\mu)|^2 = f_{11}^x(\lambda)$.

(б) Функции $\Gamma_k(z)=\Theta_k(z)\Gamma(z)$; $k=\overline{2,n}$, где $\Theta_k(z)$ определены выше, принадлежат классу B_2.

Эту «максимальную» функцию обозначим $\Gamma_1^0(z)$, а $\Theta_k(z)\Gamma_1^0(z)$ обозначим $\Gamma_k^0(z)$; $k=\overline{2,n}$. Тогда искомые функции $\varphi_1(\lambda),\ldots,\varphi_n(\lambda)$ будут граничными значениями функций $\Gamma_1^0(z),\ldots,\Gamma_n^0(z)$. Ниже будет указан способ нахождения функции $\Gamma_1^0(z)$. Из свойства (а) и теоремы 9 из [8] следует, что $\Gamma_1^0(z)$ должна иметь вид:

$$\Gamma_1^0(z) = B(z)\,d\left(\sqrt{f_{11}^x};\ z\right)\cdot g(z)\,e^{i(\alpha-\beta z)},$$

где $B(z)$—произведение Бляшке, составленное по нулям в нижней полуплоскости, $g(z)$ и $d\left(\sqrt{f_{11}^x};\ z\right)$ определяются, как и выше (см. (22)), $\beta>0$; α — действительное число.

Сразу заметим, что множитель $e^{i\alpha}$ не играет особой роли, что множитель $d\left(\sqrt{f_{11}^x};\ z\right)$ не может быть изменен и что, следовательно, подбирать нужно множители $B(z)$, $g(z)$, $e^{-i\beta z}$ с учетом требований к $\varphi_1(\lambda)$. Во-первых, ясно, что $\beta=\max\{0,\beta_1,\ldots,\beta_n\}$ (см. (22)). Во-вторых, произведение Бляшке $B(z)$ должно состоять из возможно «меньшего» числа сомножителей, ибо по модулю каждый сомножитель меньше единицы в нижней полуплоскости и, следовательно, уменьшает $|\Gamma_1(z)|$ (множителем в произведении Бляшке),

определенном формулой (13) назовем выражение, стоящее там в квадратных скобках.) Полагая, что в дробях $B_{1j}(z)/B_{2j}(z)$ из (22) уже произведено сокращение подобных членов, находим, что $B(z)$ должно представлять собой «наименьшее общее кратное» произведений Бляшке $B_{2j}(z)$ $(j=2,n)$, составленное аналогично наименьшему общему кратному для конечных произведений (ср. [10]). Можно заметить, что $B_{2j}(z)$ составлены по полюсам функций $\vartheta_j(z)$, которые определяются однозначно своими граничными значениями $f_{j1}^x(\lambda)/f_{11}^x(\lambda)$.

Для окончательного построения $\Gamma_1^0(z)$ остается подобрать член $g(z)=g(\lambda-i\mu)$; $\mu>0$. Имеем

$$|g(\lambda-i\mu)|=\exp\left\{-\frac{\mu}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+t^2}{(t-\lambda)^2+\mu^2}\sigma(dt)\right\},$$

Мера $\sigma(\cdot)$ должна быть такой, чтобы каждая сумма $\sigma(\Lambda)+\sigma_j(\Lambda)$ была мерой. Покажем, что это будет тогда и только тогда, когда

$$\sigma(\Lambda)\geqslant\sigma_j^-(\Lambda) \tag{30}$$

для каждого j и Λ, где $\sigma_j^-(\Lambda)$, нижняя вариация обобщенной меры $\sigma_j(\Lambda)$ (см., напр., [14], глава 6).

Действительно, пусть выполнено (30). Как известно,

$$\sigma_j^-(\Lambda)=-\inf_{\Lambda_1\subseteq\Lambda}\{\sigma_j(\Lambda_1)\}=\sup_{\Lambda_1\subseteq\Lambda}\{-\sigma_j(\Lambda_1)\}\geqslant-\sigma_j(\Lambda)$$

следовательно, $\sigma(\Lambda)\geqslant-\sigma_j(\Lambda)$, т. е. $\sigma(\Lambda)+\sigma_j(\Lambda)\geqslant0$. Таким образом, суммы $\sigma(\Lambda)+\sigma_j(\Lambda)$ являются мерами. Пусть, наоборот, $\sigma(\Lambda)\geqslant-\sigma_j(\Lambda)$ для каждого j и Λ, и пусть $\Lambda_\varepsilon\subseteq\Lambda$ — такое множество, что $-\sigma_j(\Lambda_\varepsilon)\geqslant\sigma_j^-(\Lambda)-\varepsilon$. Тогда: $\sigma(\Lambda)\geqslant\sigma(\Lambda_\varepsilon)\geqslant-\sigma_j(\Lambda_\varepsilon)\geqslant\sigma_j^-(\Lambda)-\varepsilon$ для любого ε. Поэтому $\sigma(\Lambda)\geqslant\sigma_j^-(\Lambda)$. Далее, для того чтобы $|g(z)|$ принимал наибольшее возможное значение, необходимо среди мер, обладающих указанным выше свойством, найти наименьшую. Иными словами, нужно решить следующую задачу: имеется n конечных мер $\mu_1(\Lambda),\ldots,\mu_n(\Lambda)$. Надо найти такую, меру $\mu(\Lambda)$ что

$$\mu(\Lambda)\geqslant\max_j\mu_j(\Lambda) \tag{31}$$

для каждого Λ, и чтобы для любой другой меры $\hat{\mu}(\Lambda)$, удовлетворяющей (31), $\hat{\mu}(\Lambda)>\mu(\Lambda)$, хотя бы для одного Λ. Назовем $\mu(\Lambda)$ «огибающей» мер $\mu_1(\Lambda),\ldots,\mu_n(\Lambda)$. Формально эта огибающая строится так. Рассмотрим $\mu_1(\cdot)$, $\mu_2(\cdot)$. Как известно, ([14], глава 6, теорема 3) $\mu_2(\cdot)$ однозначно разлагается на сумму $\mu_2(\Lambda)=\mu_2^0(\Lambda)+\mu_2^1(\Lambda)$, где мера $\mu_2^0(\cdot)$ ортогональна $\mu_1(\cdot)$, а мера $\mu_2^1(\cdot)$ — абсолютно непрерывна относительно $\mu_1(\cdot)$ и, следовательно, равна

$$\mu_2^1(\Lambda)=\int_\Lambda m_2(\lambda)\,\mu_1(d\lambda).$$

Пусть $N_2 = \{\lambda : m_2(\lambda) \geqslant 1\}$. Вводим меру:

$$\hat{\mu}_2(\Lambda) = \mu_2^0(\Lambda) + \mu_2^1(N_2 \cap \Lambda) + \mu_1(\overline{N}_2 \cap \Lambda).$$

Ясно, что $\hat{\mu}_2(\cdot)$ есть «огибающая» мер $\mu_1(\cdot)$, $\mu_2(\cdot)$ в указанном выше смысле. Далее строим $\hat{\mu}_3(\cdot)$ при помощи $\hat{\mu}_2(\cdot)$, $\mu_3(\cdot)$ аналогично тому, как строили $\hat{\mu}_2(\cdot)$ при помощи $\mu_1(\cdot)$, $\mu_2(\cdot)$, и так далее. Искомая мера $\mu(\cdot)$ совпадает с $\hat{\mu}_n(\cdot)$.

Применяя описанную процедуру к мерам $\sigma_j^-(\cdot)$; $j = \overline{2, n}$, получаем их огибающую — меру $\sigma(\cdot)$, а следовательно, — $g(z)$ и $\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_n(\lambda)$, для которых имеем:

$$x_j(t) = \int_{-\infty}^{t} c_j(t-p)\, dr(p), \tag{32}$$

где $c_j(t)$ — преобразования Фурье $\varphi_j(\lambda)$, и $H^x(t) = H^{\Delta r}(t)$ (относительно нахождения процесса $r(p)$ по известным функциям $\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_n(\lambda)$, см. [10], теорема 4). Решение задачи линейного экстраполирования теперь проводится обычным способом.

§ 3. Случай многомерного процесса ранга 1, спектральная матрица которого состоит из дробно-рациональных функций

Обозначим рассматриваемый процесс $\mathbf{x}(t)$, его спектральную матрицу $f_{ij}(\lambda) \parallel (i, j = \overline{1, n})$.

Процесс $\mathbf{x}(t)$, очевидно, регулярен, в силу теоремы 1. Если теперь

$$x_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dZ_1(\lambda)$$

— какая-то из его компонент, то для других компонент будет иметь место равенство:

$$x_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \frac{f_{j1}(\lambda)}{f_{11}(\lambda)}\, dZ_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dZ_j(\lambda).$$

Примем обозначения:

$$f_{11}(\lambda) = \frac{|B(\lambda)|^2}{|A(\lambda)|^2},$$

где $B(\lambda)$, $A(\lambda)$ — многочлены, нули которых расположены в верхней полуплоскости;

$$\frac{f_{j1}(\lambda)}{f_{11}(\lambda)} = \frac{C_j^+(\lambda)\, C_j^-(\lambda)}{D_j^+(\lambda)\, D_j^-(\lambda)} = K_j(\lambda); \quad j = \overline{2, n} \quad (K_1(\lambda) \equiv 1),$$

где $C_j^{+(-)}(\lambda)$, $D_j^{+(-)}(\lambda)$ — многочлены, причем нули $C_j^+(\lambda)$, $D_j^+(\lambda)$ находятся в верхней полуплоскости, а нули $C_j^-(\lambda)$, $D_j^-(\lambda)$ — в нижней. Степени всех

тих многочленов должны быть таковы, чтобы

$$f_{11}(\lambda) \in L^2(-\infty, \infty); \quad K_j(\lambda) \in L^2_{f_{11}}(-\infty, \infty).$$

Обозначим далее $D_{+(-)}(\lambda)$ наименьшее общее кратное многочленов $D_j^{+(-)}(\lambda)$; $j = \overline{2, n}$. Можно было бы решать задачу экстраполирования этом случае так, как это только что было сделано, тем более, что функции $\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_n(\lambda)$ здесь находятся весьма просто (ср. [10]). Однако для олного решения задачи необходимо найти также и процесс $r(p)$ из разложения (20). Это сделать труднее. Поэтому мы дадим несколько иное решение, позволяющее эффективно находить $r(p)$. Конечно, здесь будет существенно использоваться простой вид спектральных плотностей процесса.

Запишем $\mathbf{x}(t)$ следующим образом:

$$x_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \frac{\varphi_j(\lambda)}{A(\lambda)\overline{D_-(\lambda)}\, D_+(\lambda)} d\beta(\lambda), \tag{33}$$

де

$$\varphi_j(\lambda) = B(\lambda) K_j(\lambda) D_-(\lambda) D_+(\lambda) = B(\lambda) C_j^+(\lambda) C_j^-(\lambda) \frac{D_-(\lambda) D_+(\lambda)}{D_j^-(\lambda) D_j^+(\lambda)},$$

$$\varphi_j(\lambda) = \sum_{l>0} \varphi_{jl} \lambda^l; \quad j = \overline{1, n},$$

$$d\beta(\lambda) = \frac{A(\lambda)\overline{D_-(\lambda)}}{B(\lambda) D_-(\lambda)} dZ_1(\lambda).$$

Примем для краткости: $D(\lambda) = \overline{D_-(\lambda)}\, D_+(\lambda) A(\lambda)$ и $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \frac{1}{D(\lambda)} d\beta(\lambda)$.

Имеем, обозначив через N степень $D(\lambda)$:

$$x_j(t) = \varphi_j\left(-i\frac{d}{dt}\right) y(t) = \sum_{l=0}^{N-1} (-i)^l \cdot \varphi_{jl} \cdot y^{(l)}(t). \tag{34}$$

Из (34), в частности, вытекает: $H^x(t) \subseteq H^y(t)$; равенство $H^x(t) = H^y(t)$ будет доказано ниже. Таким образом, проекция $x_j(t+s)$ на $H^x(t)$ совпадает с его проекцией на $H^y(t)$. Следовательно, если обозначить эту проекцию через $\hat{x}_j(t; s)$, а проекцию $y(t+s)$ на $H^y(t)$ через $\hat{y}(t; s)$, то

$$\hat{x}_j(t, s) = \varphi_j\left(-i\frac{d}{ds}\right) \hat{y}(t; s). \tag{35}$$

Как следует хотя бы из [6], $\hat{y}(t; s) = \sum_{l=0}^{N-1} g_l(s) y^{(l)}(t)$. Там же указан простой способ нахождения коэффициентов $g_l(s)$.

Сделаем одно замечание по поводу формулы (35). Из (34) следует, что при естественном предположении о линейной независимости компонент $x(t)$ $N \geqslant n$. Если же $N = n$, то экстраполяционные формулы выглядят следующим образом:

$$\hat{x}_j(t; s) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(s) x_k(t).$$

Это следует из (34), (35) и соотношения

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} y(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{(N-1)}(t) \end{pmatrix},$$

где $\varphi = \| \varphi_{jl} \cdot (-i)^l \|$ — квадратная невырожденная матрица.

Для окончательного решения задачи (при $N > n$) необходимо выразить $y(t)$ через значения $x_k(\tau)$ $(k = \overline{1, n};\ \tau \leqslant t)$. Это будет сделано ниже.

Введем процессы:

$$u_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\lambda}}{B(\lambda)\, C_j^+(\lambda) \dfrac{D_+(\lambda)}{D_j^+(\lambda)}}\, dZ_j(\lambda); \quad u_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\lambda}}{B(\lambda)\, D_+(\lambda)}\, dZ_1(\lambda), \quad j = \overline{2, n}.$$

Справедливы следующие соотношения:

$$u_j(t) = \int_0^{\infty} x_j(t - t')\, \omega_j(t')\, dt'; \quad j = \overline{1, n} \tag{36}$$

$$\omega_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\lambda}}{B(\lambda)\, C_j^+(\lambda) \dfrac{D_+(\lambda)}{D_j^+(\lambda)}}\, d\lambda \quad (j = \overline{2, n}),$$

$$\omega_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\lambda}}{B(\lambda)\, D_+(\lambda)}\, d\lambda. \tag{37}$$

Таким образом, $u_j(t) \in H^x(t)$; $j = \overline{1, n}$. С другой стороны,

$$u_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \frac{C_j^-(\lambda) \dfrac{D_-(\lambda)}{D_j^-(\lambda)}}{D(\lambda)}\, d\beta(\lambda); \quad (j = \overline{2, n}).$$

$$u_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \frac{D_-(\lambda)}{D(\lambda)}\, d\beta(\lambda). \tag{38}$$

Рассмотрим совокупность многочленов

$$\left\{ D_-(\lambda),\ C_2^-(\lambda) \frac{D_-(\lambda)}{D_2^-(\lambda)}, \ldots, C_n^-(\lambda) \frac{D_-(\lambda)}{D_n^-(\lambda)} \right\}. \tag{39}$$

Из определения $D_-(\lambda)$ следует, что наибольший общий делитель этой совокупности равен 1. Поэтому при помощи, например, алгоритма Эвклида можно получить единицу из совокупности многочленов (39). Это означает, что мы получим $y(t)$ из $u_j(t)$ $(j = \overline{1, n})$ путем следующих операций: взятия

производных от $u_j(t)$, составления из них линейных комбинаций, последующего взятия производных от этих комбинаций и т. д. Отсюда получаем, что $y(t) \in H^x(t)$ и что $H^y(t) = H^x(t)$.

Попробуем выразить $y(t)$ явным образом через значения процесса $\mathbf{x}(t)$ «в прошлом». Как известно из курса алгебры, существуют многочлены $P_1(\lambda), \ldots, P_n(\lambda)$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{C}_k(\lambda) P_k(\lambda) = 1, \quad \text{где } C_k(\lambda) = C_k^-(\lambda) \frac{D_-(\lambda)}{D_k^-(\lambda)},$$

а степень многочлена $P_j(\lambda)$ не превосходит суммы степеней многочленов $\hat{C}_k(\lambda)$; $k \neq j$. Таким образом, можно формально записать:

$$y(t) = \sum_{k-1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \frac{\hat{C}_k(\lambda) P_k(\lambda)}{B(\lambda) C_k^+(\lambda) \cdot \dfrac{D_+(\lambda)}{D_k^+(\lambda)}} dZ_k(\lambda). \tag{40}$$

Каждое слагаемое есть комбинация выражений:

$$x_k^{(l)}(t); \quad (l = 1, \ldots) \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} x_k(t-\tau) \hat{w}_k(\tau) d\tau \quad (k = \overline{1, n}). \quad \text{(ср. [6])}$$

При этом может оказаться, что в эту комбинацию входят члены $x_k^{(l)}(t)$, которые (при больших l) существуют лишь как обобщенные случайные процессы. Это происходит потому, что элемент $y(t) \in H^x(t)$ записывается не обязательно в виде (40), но в виде (ср. [11])

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\hat{C}_k(\lambda) P_k(\lambda)}{B(\lambda) C_k^+(\lambda) \dfrac{D_+(\lambda)}{D_k^+(\lambda)}} dZ_k(\lambda) \right\}$$

и не обязательно представляется как сумма элементов из $H_j^x(t)$ $(j = \overline{1, n})$ (см. также [10]).

Заметим, что рассмотренный в этом параграфе метод решения задачи экстраполирования процессов ранга 1, конечно, не является единственно возможным. Метод прогноза для одномерных процессов, предложенный Ягломом [6], видимо, обобщается на многомерные процессы ранга 1.

Применение того или иного метода зависит от конкретных задач. Поэтому каждый раз можно выбирать, каким способом легче находить экстраполяционные формулы. Рассмотрим несложный пример.

Пусть $\mathbf{x}(t)$ — двумерный процесс ранга 1, причем

$$f_{11}(\lambda) = \frac{1}{|\lambda - i|^4}; \quad \frac{f_{21}(\lambda)}{f_{11}(\lambda)} = \frac{(\lambda - 2i)^4 (\lambda + 3i)}{(\lambda - i)^5 (\lambda + i)}.$$

Равенства (33) в данном случае выглядят так:

$$x_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \frac{(\lambda - i)^3 (\lambda + i)}{(\lambda - i)^6} d\beta(\lambda),$$

$$x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \frac{(\lambda - 2i)^4 (\lambda + 3i)}{(\lambda - i)^6} d\beta(\lambda),$$

$$d\beta(\lambda) = \frac{(\lambda - i)^3}{(\lambda + i)} dZ_1(\lambda),$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \frac{1}{(\lambda - i)^6} d\beta(\lambda).$$

В силу соотношений (35)

$$\hat{x}_1(t;\ s) = \left(\frac{d}{ds} + 1\right)^3 \left(\frac{d}{ds} - 1\right) \hat{y}(t,\ s),$$

$$\hat{x}_2(t,\ s) = -i \left(\frac{d}{ds} + 2\right)^4 \left(\frac{d}{ds} - 3\right) \hat{y}(t;\ s).$$

При этом

$$\hat{y}(t;\ s) = \sum_{l=0}^{5} g_l(s)\, y^{(l)}(t).$$

Коэффициенты $g_l(s)$ согласно [6] находим следующим образом: обозначим через $\Phi_s(\lambda)$ многочлен от λ пятой степени, определенный условиями:

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} [\Phi_s(\lambda) - e^{is\lambda}]\,|_{\lambda = i} = 0;\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 5.$$

Тогда $g_l(s)$ будет коэффициентом многочлена $\Phi_s(-i\lambda)$ при λ^l.

Выразим теперь $y(t)$ через значения $x_1(t)$, $x_2(t)$. Для этого составим по формулам (36), (37) процессы:

$$u_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\lambda}}{(\lambda - i)^3} dZ_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \frac{(\lambda + i)}{(\lambda - i)^6} d\beta(\lambda),$$

$$u_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\lambda}}{(\lambda - 2i)^4} dZ_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \frac{\lambda + 3i}{(\lambda - i)^6} d\beta(\lambda).$$

Нетрудно вычислить, что

$$u_1(t) = -\pi i \int_0^{\infty} x_1(t - \tau)\, \tau^2 e^{-\tau}\, d\tau,$$

$$u_2(t) = \frac{\pi}{3} \int_0^{\infty} x_2(t - \tau)\, \tau^3 e^{-2\tau}\, d\tau.$$

Таким образом,

$$y(t) = -\frac{i}{2} [u_2(t) - u_1(t)] =$$

$$= -\frac{\pi i}{2} \left\{ \frac{1}{3} \int_0^{\infty} x^2(t - \tau)\, \tau^3 e^{-2\tau}\, d\tau + i \int_0^{\infty} x_1(t - \tau)\, \tau^2 e^{-\tau}\, d\tau \right\}.$$

Поступила в редакцию
23.7.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Cramer, On the theory of stationary random processes, Ann. Math., **41** (1940), 215—230.

[2] А. Н. Колмогоров, Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, Бюллетень МГУ, **2**, 6 (1941), 1—40.

[3] В. Н. Засухин, К теории многомерных стационарных случайных процессов, ДАН СССР, **33** (1941), 435—437.

[4] Ю. А. Розанов, Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем, Успехи матем. наук, XIII, 2 (1958). 93—142.

[5] N. Wiener, P. Masani, The predication theory of multivariate stochastique processes, I—II, Acta Mathematica, **98**, 1—2 (1958), 93—137.

[6] А. М. Яглом, Экстраполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью, Труды Московского математич. общества, 4 (1955), 237—278.

[7] Е. Г. Гладышев, О многомерных стационарных случайных процессах, Теория вероят. и ее примен., **II**, 4 (1958), 458—462.

[8] В. И. Крылов, О функциях, регулярных в полуплоскости, Матем. сб., **6**, 1 (1939), 95—138.

[9] Р. Ф. Матвеев, О регулярности многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем, ДАН СССР, **126**, 4 (1959), 713—715.

[10] Ю. А. Розанов, Линейная экстраполяция многомерных стационарных процессов ранга 1 с дискретным временем, ДАН СССР, **125**, 2 (1959), 277—280.

[11] P. Masani, N. Wiener, On bivariate stationary processes and the factorization of matrix valued functions, Теория вероят. и ее примен. **IV**, 3 (1953), 322—330.

[12] А. М. Яглом, Эффективное решение линейных аппроксимационных задач для многомерных стационарных процессов с рациональным спектром, Теория вероят. и ее примен., **V**, 3 (1960), 265—292.

[13] Р. Ф. Матвеев, О сингулярных многомерных стационарных процессах, Теория вероят. и ее примен., **V**, 1 (1960), 38—44.

[14] П. Халмош, Теория меры, М., ИЛ, 1953.

SUR LES PROCESSUS RÉGULIERS STATIONNAIRES VECTORIELLES

R. F. MATVEEV (MOSCOU)

(Résumé)

Le chapitre premier montre quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes à réunir pour que le processus à n dimensions d'un certain rang $m \leqslant n$ soit régulier. Les chapitres 2 et 3 analysent les processus de rang 1 à temps continu.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том VI И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 2
1961

ON LINEAR ESTIMATION THEORY FOR AN INFINITE NUMBER OF OBSERVATIONS

JAROSLAV HÁJEK

1. **Introduction.** We shall deal with linear estimation of parameters $\theta = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \alpha_\nu$, or random variables y with $\mathbf{E}y = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \alpha_\nu$, on the basis of an arbitrary infinite family of observations $\{x_t,\ t \in T\}$. It will be shown that all classical theorems on least-square estimates and Markov estimates remain true for *any* family of observations $\{x_t,\ t \in T\}$ with *any* covariance structure and with *any* functions φ_ν in the linear hypothesis (model (2.1)). Our proofs use elementary facts on linear functionals in an Hilbert space and the concept of sufficient statistics.

Under the assumption of normality non-correlation is equivalent to independence, the best linear unbiassed estimates are equivalent to the best unbiassed estimates, and wide-sense sufficient statistics (see Section 3) are equivalent to strict-sense sufficient statistics. The Gaussian approach has been applied in papers [1] and [7], which deal with the single parameter case ($m = 1$). In this paper, however, we shall not assume normality. Using the same argumentation as in [7], we could, however, easily derive the strict-sense formulations of all the theorems. The assumption of normality is indispensable in hypothesis-testing problems. Our attention will be focused, however, to estimation problems. Let us only point out that the existence of a sufficient finite set of random variables makes it possible to carry the problem of hypothesis testing back to the classical one.

As an illustration let us look at the problem discussed by L. A. Zadeh and J. R. Ragazzini in their paper [2]. They considered a time series

$$x(t) = M(t) + N(t) + \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_m t^n$$

consisting of a stationary random signal $M(t)$, a stationary random noise $N(t)$ and a deterministic signal of polynomial form, where $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ are unknown constants. They supposed that the degree n of the polynomial were fixed and that $M(t)$ and $N(t)$ had zero mean values. They looked for a best linear unbiassed estimate (i. e. prediction, or filtration) of the whole signal $y = M(t_0) + \alpha_0 + \alpha_1 t_0 + \ldots + \alpha_n t_0^n$ at a time point t_0, on the basis of $\{x(t),\ 0 \leq t \leq T\}$. If we replace $M(t) + N(t)$ by an arbitrary stochastic process, the interval $[0, T]$ by an arbitrary set T and the functions t^ν by arbitrary functions $\varphi_{\nu t} = \varphi_\nu(t)$, we arrive at the general problem that is going to be treated.

The Zadeh — Ragazzini model was generalized in [3], where the functions v were replaced by arbitrary analytic functions. Very interesting asymptotic esults for stationary processes and $\varphi_t \equiv 1$ are found in [1] and [4]. These esults were generalized for $\varphi_t = e^{i\lambda t}$ in [6].*

2. **Formulation of the problem and the class of linear estimates.** Let $= (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ run through an m-dimensional vector space A_m, and let $\varphi_{1t}, \ldots, \varphi_{mt}$ be m known functions of $t \in T$, where T is an arbitrary set. Consider a family of random variables $\{x_t, t \in T\}$ and a system of probability distributions $\mathbf{P}_\alpha(\cdot)$, $\alpha \in A_m$, of this family with the following first and second moments:

$$\mathbf{E}_\alpha x_t = \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu \varphi_{\nu t} \quad (\alpha \in A_m,\ t \in T), \tag{2.1}$$

$$\mathbf{E}_\alpha x_t \bar{x}_s = \mathbf{E}_0 x_t \bar{x}_s + \mathbf{E}_\alpha x_t \mathbf{E}_\alpha \bar{x}_s \ (\alpha \in A_m;\ t,\ s \in T). \tag{2.2}$$

In the paper we shall denote mean value by indices of corresponding probability distributions, so that $\mathbf{E}_\alpha(\cdot) = \int (\cdot)\, d\mathbf{P}_\alpha$, etc. The random variables x_t as well as the functions $\varphi_{\nu t}$ and parameters α_ν may either be real-valued or complex-valued; the notation will however refer to the complex case. Note that the covariance does not vary with $\alpha \in A_m$ and equals $\mathbf{E}_0 x_t \bar{x}_s$, where $0 = (0, \ldots, 0)$. Briefly speaking, we are dealing with a linear hypothesis (model) with m parameters $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

We shall look for best linear unbiassed estimates for linear functionals θ defined on $\alpha \in A_m$:

$$\theta = \theta(\alpha) = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \alpha_\nu \tag{2.3}$$

where $c_1, \ldots, c_m$ are either real or complex numbers. All possible linear functionals θ given by all possible $c = (c_1, \ldots, c_m)$ also form an m-dimensional vector space, say A_m^+. The linear functionals θ will also be called *parameters*.

More generally, we will try to estimate a random variable such y that for $\theta \in A_m^+$

$$\mathbf{E}_\alpha y = \theta(\alpha), \quad (\alpha \in A_m) \tag{2.4}$$

and that the variance of y and the covariances of y and x_t, $t \in T$, are independent of $\alpha \in A_m$. A random variable v will be called an unbiassed estimate of y, if

$$\mathbf{E}_\alpha v = \theta(\alpha), \quad (\alpha \in A_m) \tag{2.5}$$

and a best unbiassed estimate of y, if, under the restriction of (2.5), $\mathbf{E}_0 |v - y|^2$ will be minimum. Best linear unbiassed estimates of y are sometimes called unbiassed projections of y or unbiassed predictions of y.

We shall choose the estimates in the class of statistics which either are finite linear combinations of random variables x_t, $t \in T$, or are in-mean-limits of such combinations. Of course, all in-mean-limits have to be well-defined with respect to any probability distribution $\mathbf{P}_\alpha(\cdot)$, $\alpha \in A_m$. Let us

* A compact presentation of the problem with many new results may be found in monograph [9].

denote the set of all finite linear combinations $x = \sum c_i x_{t_i}$ by M and try to find a probability distribution $\mathbf{P}_1(\cdot)$ which dominates over all the distributions $\mathbf{P}_\alpha(\cdot)$ in the following sense: For any $\alpha \in A_m$ there exists a finite constant K_α such that

$$\mathbf{E}_\alpha |x|^2 \leqslant K_\alpha \mathbf{E}_1 |x|^2 \quad (x \in M) \tag{2.6}$$

where K_α is independent of $x \in M$. It is obvious that the in-mean-limits with respect to $\mathbf{P}_1(\cdot)$ will then be well-defined via each $\mathbf{P}_\alpha(\cdot)$, $\alpha \in A_m$.

Such a distribution $\mathbf{P}_1(\cdot)$ may be constructed, for example, as follows: Put

$$\mathbf{P}_{\nu 1} = \mathbf{P}_{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{\nu-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-\nu})} \tag{2.7}$$

and

$$\mathbf{P}_1(\cdot) = \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{m} \mathbf{P}_{\nu 1}(\cdot). \tag{2.8}$$

Lemma 2.1. *It is true that*

$$\mathbf{E}_\alpha |x|^2 \leqslant \left(1 + m \sum_{\nu=1}^{m} |\alpha_\nu|^2\right) \mathbf{E}_1 |x|^2 \quad (x \in M) \tag{2.9}$$

where $\mathbf{P}_1(\cdot)$ *is defined by* (2.8).

Proof. The relation (2.2) may be easily extended to M:

$$\mathbf{E}_\alpha x\bar{y} = \mathbf{E}_0 x\bar{y} + \mathbf{E}_\alpha x \mathbf{E}_\alpha \bar{y} \quad (x, y \in M). \tag{2.10}$$

From (2.7) and (2.1) it follows that

$$\mathbf{E}_\alpha x = \sum \alpha_\nu \mathbf{E}_{\nu 1} x \quad (x \in M). \tag{2.11}$$

Making use of (2.10) and (2.11), we have

$$\mathbf{E}_\alpha |x|^2 = \mathbf{E}_0 |x|^2 + \left| \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu \mathbf{E}_{\nu 1} x \right|^2 \leqslant \mathbf{E}_0 |x|^2 + \sum_{\nu=1}^{m} |\alpha_\nu|^2 \sum_{\nu=1}^{m} |\mathbf{E}_{\nu 1} x|^2. \tag{2.12}$$

On the other hand, in view of (2.8), we obtain (2.13)

$$\mathbf{E}_1 x\bar{y} = \mathbf{E}_0 x\bar{y} + \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{m} \mathbf{E}_{\nu 1} x \mathbf{E}_{\nu 1} \bar{y} \quad (x, y \in M), \tag{2.13}$$

and especially

$$\mathbf{E}_1 |x|^2 = \mathbf{E}_0 |x|^2 + \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{m} |\mathbf{E}_{\nu 1} x|^2 \quad (x \in M). \tag{2.14}$$

Now, (2.9) is a simple consequence of (2.12) and (2.14).

Let us denote the set of in-mean-limits via $\mathbf{P}_1(\cdot)$ by $\mathfrak{M}$. The set $\mathfrak{M}$, in which random variables with $\mathbf{P}_1(x = y) = 1$ are considered as identical and an inner product is introduced, $[x, y] = \mathbf{E}_1 x\bar{y}$ $(x \in \mathfrak{M})$, obviously is an Hilbert space, which in what follows will be denoted by $\mathfrak{M}_1$.

Lemma 2.2. *The relations* (2.9), (2.10), (2.11) *and* (2.13) *extend to the whole set* $\mathfrak{M}_1$.

Proof. Clear.

The set $\mathfrak{M}_1$ will represent the class of admissible linear estimates.

3. Theorems on existence of best linear unbiassed estimates. Let us first classify the vectors $\alpha \in A_m$ and parameters $\theta \in A_m^+$.

We denote by A_p the p-dimensional linear subspace of A_m consisting of the α's for which

$$\sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu \varphi_{\nu t} = 0 \quad (t \in T). \tag{3.1}$$

In view of (2.1), (3.1) is equivalent to

$$\mathbf{E}_\alpha x = 0 \quad (x \in \mathfrak{M}_1). \tag{3.2}$$

We denote by A_q the q-dimensional subspace of A_m consisting of the α's, for which there exists a finite constant K_α such that

$$\mathbf{E}_\alpha |x|^2 \leqslant K_\alpha \mathbf{E}_0 |x|^2 \quad (x \in \mathfrak{M}_1) \tag{3.3}$$

i. e. the square mean value is uniformly dominated by variance. Clearly $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant m$, and $A_p \subset A_q$.

A parameter $\theta \in A_m^+$, for which a linear unbiassed estimate exists will be called *estimable*. A parameter $\theta \in A_m^+$, for which a linear unbiassed estimate with variance zero exists, will be called *exactly estimable*.

The following theorem shows the close relation of estimability and exact estimability of the θ's to the subspaces A_p and A_q.

Theorem 3.1. *A parameter $\theta \in A_m^+$ is estimable if, and only if, $\theta(\alpha) = 0$ for $\alpha \in A_p$, i. e. for all the α's satisfying* (3.2). *The estimable θ's form a linear subspace A_{m-p}^+ of dimension $m - p$.*

A parameter $\theta \in A_{m-p}^+$ is exactly estimable if, and only if, $\theta(\alpha) = 0$ for $\alpha \in A_q$, i. e. for all the α's satisfying (3.3). *The exactly estimable θ's form a linear subspace A_{m-q}^+ of dimension $m - q$.*

Each estimable parameter θ possesses a unique best linear unbiassed estimate. The class of best linear unbiassed estimates forms an $(m-p)$-dimensional linear subspace of $\mathfrak{M}_1$, say W, and this subspace consists of random variables $w_\alpha \in \mathfrak{M}_1$, $\alpha \in A_m$, uniquely determined by the relations

$$\mathbf{E}_\alpha x = \mathbf{E}_1 x \bar{w}_\alpha \quad (x \in \mathfrak{M}_1). \tag{3.4}$$

The relation between a parameter $\theta \in A_{m-p}^+$ and its best linear unbiassed estimate v^θ is given by the equation

$$\theta = \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu \mathbf{E}_1 (v^\theta \bar{w}_{\nu 1}) \tag{3.5}$$

where $w_{\nu 1}$, $1 \leqslant \nu \leqslant m$, are uniquely determined by the relation

$$\mathbf{E}_{\nu 1} x = \mathbf{E}_1 x \bar{w}_{\nu 1} \quad (x \in \mathfrak{M}_1). \tag{3.6}$$

Proof. In view of (2.9), we have

$$|\mathbf{E}_\alpha x|^2 \leqslant \mathbf{E}_\alpha |x|^2 \leqslant \left(1 + m \sum_{\nu=1}^{m} |\alpha_\nu|^2\right) \mathbf{E}_1 |x|^2 \tag{3.7}$$

so that $\mathbf{E}_\alpha x$ is a linear functional on $\mathfrak{M}_1$. Consequently, as is well-known,

there exists a uniquely determined random variable $w_\alpha \in \mathfrak{M}_1$ such that (3.4) holds true (recall that $\mathbf{E}_1 x\bar{y}$ is the inner product in $\mathfrak{M}_1$).

The random variables w_α defined by (3.4) obviously form an $(m-p)$-dimensional subspace W of $\mathfrak{M}_1$. Take a random variable $x \in \mathfrak{M}_1$ and denote its projection on W by x'. We will show that

$$\mathbf{E}_\alpha x' = \mathbf{E}_\alpha x \quad (\alpha \in A_m) \tag{3.8}$$

and

$$\mathbf{E}_0 |x'|^2 = \mathbf{E}_0 |x|^2 - \mathbf{E}_0 |x - x'|^2. \tag{3.9}$$

In view of (3.4), (3.8) may be rewritten as

$$\mathbf{E}_1 x' \bar{w}_\alpha = \mathbf{E}_1 x \bar{w}_\alpha \tag{3.10}$$

where $w_\alpha \in W$. However, (3.10) is a direct consequence of the fact that x' is a projection of x on W. Further, from (2.13) and (3.8) it follows that

$$0 = \mathbf{E}_1 \{x'(\bar{x} - \bar{x}')\} = \mathbf{E}_0 \{x'(\bar{x} - \bar{x}')\} + \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{m} \mathbf{E}_{\nu 1} x' \mathbf{E}_{\nu 1} (\bar{x} - \bar{x}') =$$

$$= \mathbf{E}_0 \{x'(\bar{x} - \bar{x}')\},$$

which is equivalent to (3.9). The relations (3.8) and (3.9) show that every best linear unbiassed estimate must belong to W.

Now (3.5), where $\theta(\alpha) = \mathbf{E}_\alpha v^0$, is a simple consequence of (2.11) and (3.6). If we show that $v^0 \in W$ is a unique unbiassed estimate of θ given by (3.5), the assertion that W coincides with the class of all best linear unbiassed estimates will be proved. It suffices, however, to note that the random variables $w_{11}, \ldots, w_{m1}$ form a complete basis in W so that any element $w \in W$ is uniquely determined by Fourier coefficients $\mathbf{E}_1 w \bar{w}_{\nu 1}$, $1 \leqq \nu \leqq m$.

The assertion concerning estimability will be proved as follows. If $\theta(\alpha) \neq 0$ for an α satisfying (3.2), then, clearly, no $x \in \mathfrak{M}_1$ is an unbiassed estimate of θ. Conversely, if $\theta(\alpha) = 0$ for all the α's satisfying (3.2), then $\theta(\alpha) \neq \theta(\beta)$ implies $w_\alpha \neq w_\beta$, so that θ may also be interpreted as a functional defined on W. This functional is, obviously linear, so that there exists an element v^0 such that

$$\theta(w_\alpha) = \mathbf{E}_1 v^0 \bar{w}_\alpha,$$

which in conjunction with $\theta(\alpha) = \theta(w_\alpha)$ and (3.4) gives

$$\theta(\alpha) = \mathbf{E}_\alpha v^0;$$

so that θ is estimable.

In order to prove the last assertion concerning exact estimability, let us note that (2.13) and (3.4) imply

$$\mathbf{E}_0 (x\bar{w}_\alpha) = \mathbf{E}_1 (x\bar{w}_\alpha) - \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{m} \mathbf{E}_{\nu 1} x \mathbf{E}_{\nu 1} \bar{w}_\alpha =$$

$$= \mathbf{E}_\alpha x - \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{m} \mathbf{E}_{\nu 1} x \mathbf{E}_{\nu 1} \bar{w}_\alpha, \quad (\alpha \in A_m). \tag{3.11}$$

y putting

$$\beta = \alpha - \frac{1}{m}(\mathbf{E}_{11}\bar{w}_\alpha, \ldots, \mathbf{E}_{m1}\bar{w}_\alpha), \ (\alpha \in A_m) \tag{3.12}$$

nd making use of (2.11), we can rewrite (3.11) as follows:

$$\mathbf{E}_0 x\bar{w}_\alpha = \mathbf{E}_\beta x \ (\alpha \in A_m). \tag{3.13}$$

low, if $w_\alpha = v^\theta$ is the best linear unbiassed estimate of θ, then (3.13) nplies that

$$\mathbf{E}_0 |v^\theta|^2 = \mathbf{E}_\beta v^\theta = \theta(\beta). \tag{3.14}$$

rom (3.13) it follows that β satisfies the condition (3.3):

$$|\mathbf{E}_\beta x|^2 \leqslant \mathbf{E}_0 |w_\alpha|^2 \mathbf{E}_0 |x|^2 \ (x \in \mathfrak{M}_1). \tag{3.15}$$

onsequently, if $\theta(\beta) = 0$ for every β satisfying (3.3), then, in view of (3.14), $_0 |v^\theta|^2 = 0$. Conversely, if $\theta(\beta) = \mathbf{E}_\beta v^\theta \neq 0$ and the condition (3.3) is satisfied for β, then $K_\beta \mathbf{E}_0 |v^\theta|^2 \geqslant \mathbf{E}_\beta |v^\theta|^2 \geqslant |\mathbf{E}_\beta v^\theta|^2 > 0$, so that θ cannot be xactly estimable.

The assertions concerning the dimension of subspaces of estimable and xactly estimable parameters θ are clear. Q. E. D.

Remark 3.1 Theorem 3.1 implies that any best linear unbiassed esti- nate is a linear combination of a system of random variables $v_1, \ldots, v_l$ omplete in W. As the dimension of W equals $m - p$, the minimum number f random variables $v_1, \ldots, v_l$ is $l = m - p$. We can say that any such ector $v_1, \ldots, v_{m-p}$ is sufficient for linear estimation (or sufficient in the ide sense).

Remark 3.2 If the functions φ_{vt} are linearly independent, then a best near unbiassed estimate exists for any parameter $\theta \in A_m$. In particular there xist best linear estimates $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_m$ for $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. If $v^1, \ldots, v^m$ are ther unbiassed estimates of $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, then, for any constants $c_1, \ldots, c_m$, e have

$$\mathbf{E}_0 \left| \sum_{v=1}^{m} c_v \hat{\alpha}_v \right|^2 \leqslant \mathbf{E}_0 \left| \sum_{v=1}^{m} c_v v^v \right|^2 \tag{3.16}$$

ecause $\Sigma c_v \hat{\alpha}_v$ is the best linear estimate of $\Sigma c_v \alpha_v$. Consequently, the ran- om vector $(\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_m)$ is a Markov estimate for the vector $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. hus, for example, the assertion of Theorem 1 of paper [6] remains true ven if we drop the assumption that the functions $\varphi_v(t) = \varphi_{vt}$ are continuous.

The following theorem shows that the case of estimating a random ariable needs no substantially new theory.

Theorem 3.2. *Suppose that* $\mathbf{E}_\alpha y = \theta(\alpha)$ *is estimable and denote the rojection of* y *on* $\mathfrak{M}_1$ *by* y_1. *Then*

$$\theta_1(\alpha) = \mathbf{E}_\alpha (y - y_1) \tag{3.17}$$

s also estimable and the best linear unbiassed estimate of y *say* $\hat{y}$, *exists, s unique, and equals*

$$\hat{y} = y_1 + \hat{\theta}_1 \tag{3.18}$$

where $\hat{\theta}_1$ *is the best linear unbiassed estimate of* θ_1. *It holds that*

$$\mathbf{E}_0 |y - \hat{y}|^2 = \mathbf{E}_1 |y - y_1|^2 + \mathbf{E}_1 |\hat{\theta}_1|^2. \tag{3.19}$$

Proof. If v is an unbiassed estimate of y, then, since y_1 is a projection of y,

$$\mathbf{E}_0 |y - v| = \mathbf{E}_1 |y - v|^2 = \mathbf{E}_1 |y - y_1|^2 + \mathbf{E}_1 |v - y_1|^2.$$

Now, $v - y_1$ is an unbiassed estimate of θ_1, because $\mathbf{E}_\alpha v = \mathbf{E}_\alpha y$. Hence, $\mathbf{E}_1 |v - y_1|^2$ will be minimum if $v - y_1 = \hat{\theta}_1$, where $\hat{\theta}_1$ is the best linear unbiassed estimate of θ_1. θ_1 is estimable, since $\mathbf{E}_\alpha y$ is assumed to be estimable and $\mathbf{E}_\alpha y_1$ is unbiassedly estimable simply by $y_1 \in \mathfrak{M}_1$. Q. E. D.

4. Regular models. If the condition (3.3) is fulfilled for all $\alpha \in A_m$, we shall speak about a regular model. In regular models no parameter $\theta \neq 0$ is exactly estimable. In some important regular linear models explicit solutions are available.

As is seen from (3.3), in a regular model the $\mathbf{P}_0$-distribution may serve as the dominating distribution. The set of in-mean-limits via $\mathbf{P}_0(\cdot)$ coincides with the set $\mathfrak{M}$ introduced in Section 2. The set $\mathfrak{M}$, in which random variables with $\mathbf{P}_0(x = y) = 1$ are considered as identical and the following inner product is introduced

$$[x, y] = \mathbf{E}_0 x\bar{y} \tag{4.1}$$

obviously is an Hilbert space, which in what follows will be denoted by $\mathfrak{M}_0$. $\mathfrak{M}_0$ consists of the same elements as $\mathfrak{M}_1$, but has a different inner product. It is again clear that the mean values $\mathbf{E}_\alpha x$ are linear functionals on $\mathfrak{M}_0$, so that for any $\alpha \in A_m$ there exists an element $v_\alpha \in \mathfrak{M}_0$ such that

$$\mathbf{E}_\alpha x = \mathbf{E}_0 x\bar{v}_\alpha \quad (x \in \mathfrak{M}_0) \tag{4.2}$$

and that the class $V = \{v_\alpha,\ \alpha \in A_m\}$ represents the class of all best linear unbiassed estimates of estimable parameters $\theta \in A_{m-p}^+$. Clearly $V = W$ but, generally, $v_\alpha \neq w_\alpha$, $\alpha \in A_m$.

Theorem 4.1. *If the model is regular, then a random variable* $v^0 \in V$ *determined by* (4.2) *is the best linear estimate for*

$$\theta = \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu \mathbf{E}_0 (v^0 \bar{v}_{\nu 1}) \tag{4.3}$$

where $v_{\nu 1}$, $1 \leqslant \nu \leqslant m$, *are determined by*

$$\mathbf{E}_{\nu 1} x = \mathbf{E}_0 x\bar{v}_{\nu 1} \quad (x \in \mathfrak{M}_0). \tag{4.4}$$

The best linear unbiassed estimate of the random variable y, *considered in Theorem* 3.2, *equals*

$$\hat{y} = y_0 + \hat{\theta}_0 \tag{4.5}$$

where y_0 *is the projection of* y *on* $\mathfrak{M}_0$ *and* $\hat{\theta}_0$ *is the best linear estimate of*

$$\theta_0(\alpha) = \mathbf{E}_\alpha (y - y_0).$$

It holds that

$$\mathbf{E}_0 |y - \hat{y}|^2 = \mathbf{E}_0 |y - y_0|^2 + \mathbf{E}_0 |\hat{\theta}_0|^2. \tag{4.6}$$

Proof. Clear.

Remark 4.1. The random variable $v_{\nu 1}$ is also uniquely determined by he relation

$$\varphi_{\nu t} = \mathbf{E}_0 x_t \overline{v_{\nu 1}} \; (t \in T) \tag{4.7}$$

ecause $\varphi_{\nu t} = \mathbf{E}_{\nu 1} x_t$, and if the relation (4.4) is fulfilled for x_t, $t \in T$, then is satisfied by any $x \in \mathfrak{M}_0$.

Remark 4.2. The formulas (4.5) and (4.6) have been derived by A. M. Jaglom in paper [3] for $m = 1$, $\varphi_t = 1$, and stationary processes.

Theorem 4.2. *Suppose that no* $\alpha \neq (0, \ldots, 0)$ *fulfills the relation* 3.2), *i. e. that the functions* $\varphi_{\nu t}$, $1 \leqslant \nu \leqslant m$ *are linearly independent. Introuce the matrix*

$$D = \| \mathbf{E}_0 v_{\nu 1} \overline{v}_{\mu 1} \|_{\nu,\mu=1}^{m} \tag{4.8}$$

where $v_{\nu 1}$ *are determined by* (4.4) (*or by* (4.7)), *and denote the best linear stimates of* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ *by* $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_m$.

Then

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_m \end{bmatrix} = D^{-1} \begin{bmatrix} v_n \\ \vdots \\ v_{m-1} \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

nd

$$\| \mathbf{E}_0 \hat{\alpha}_\nu \overline{\hat{\alpha}}_\mu \|_{\nu,\mu=1}^{m} = D^{-1}. \tag{4.10}$$

Best linear estimates of parameters $\theta = \sum c_\nu \alpha_\nu$ *equal* $\hat{\theta} = \sum c_\nu \hat{\alpha}_\nu$.

Proof. The matrix D is regular because, in view of (4.7), linear indeendence of $\varphi_{\nu t}$ is equivalent to linear independence of $v_{\nu 1}$, $1 \leqslant \nu \leqslant m$. Thus n order to prove (4.9), it suffices to show that

$$v_{\nu 1} = \sum_{\mu=1}^{m} \hat{\alpha}_\mu \mathbf{E}_0 (v_{\nu 1} \overline{v}_{\mu 1}) \; (1 \leqslant \nu \leqslant m) \tag{4.11}$$

. e. that the right side of (4.11) fulfills (4.4). When $x = v_{j1}$, first of all,

$$\mathbf{E}_{\nu 1} v_{j1} = \mathbf{E}_0 (v_{j1} \overline{v}_{\nu 1}) \tag{4.12}$$

nd, secondly,

$$\mathbf{E}_0 \left(v_{j1} \overline{\sum_{\mu=1}^{m} \hat{\alpha}_\mu \mathbf{E}_0 (v_{\nu 1} \overline{v}_{\mu 1})} \right) = \sum_{\mu=1}^{m} \mathbf{E}_0 (v_{j1} \overline{\hat{\alpha}}_\mu) \mathbf{E}_0 (\overline{v}_{\nu 1} v_{\mu 1}) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{m} \overline{\mathbf{E}_{j1} \hat{\alpha}_\mu} \mathbf{E}_0 (\overline{v}_{\nu 1} v_{\mu 1}) = \mathbf{E}_0 (\overline{v}_{\nu 1} v_{j1}), \tag{4.13}$$

where we have made use of the obvious relation

$$\mathbf{E}_{j1} \hat{\alpha}_\mu = \begin{cases} 1 \text{ if } j = \mu, \\ 0 \text{ if } j \neq \mu. \end{cases} \tag{4.14}$$

By comparing (4.12) and (4.13), we see that (4.4) is fulfilled for $x = v_{j1}$, $\leqslant \nu \leqslant m$ and hence by an arbitrary $x \in V$. Now, from (4.4) it is easily seen hat $\mathbf{E}_{\nu 1} x = \mathbf{E}_{\nu 1} x'$, where x' is the projection of x on $\mathfrak{M}_0$. Hence (4.4) is ulfilled for any $x \in \mathfrak{M}_0$, and (4.9) is thus proved.

Finally, (4.10) is a simple consequence of (4.9), and $\sum c_v \hat{\alpha}_v$ is the best unbiassed estimate of $\sum c_v \alpha_v$, because it is unbiassed and belongs to V, where each unbiassed estimate is unique. Q.E.D.

Remark 4.3. The vector $v_{11}, \ldots, v_{m1}$ is sufficient in the sense of Remark 3.1.

5. Strict sense (Gaussian) interpretation. If the random variables x_t, as well as the functions φ_{vt} and components α_v are real-valued, then the first and second moments (2.1) and (2.2) uniquely determine a Gaussian distribution system. Using the same reasoning as in the proof of Theorem 3.1 in [7], we can show that the vector $v_1, \ldots, v_{m-p}$ mentioned in Remark 3.1 is sufficient (in the strict sense) for the Gaussian distribution system considered. The model is regular if, and only if, all Gaussian distributions in the system are equivalent as measures. A parameter θ is exactly estimable if, and only if, $\theta(\alpha) = 0$ for all α's such that $\mathbf{P}_\alpha(\cdot)$ is equivalent to $\mathbf{P}_0(\cdot)$.

6. Examples. Now we shall present three examples, which illustrate the regularity conditions and show an explicit solution for $v_{11}, \ldots, v_{m1}$ in the case where $\{x_t, t \in T\}$ is a stationary process of the autoregressive type.

Example 1. Let $\{x_t, t = \ldots -1, 0, 1, \ldots\}$ be a discrete stationary process with spectral density $f(\lambda)$ satisfying the following condition:

$$0 < \varepsilon < f(\lambda) < K < \infty \quad (-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi). \tag{6.1}$$

Let the α-mean value of this process be given by (2.1), where T is the set of all integers. We will show that the model is regular if, and only if,

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |\varphi_{vt}|^2 < \infty \qquad (1 \leqslant v \leqslant m). \tag{6.2}$$

Making use of the well-known isometric correspondence $x_t \longleftrightarrow e^{it\lambda}$, and, generally, $x \longleftrightarrow g(\lambda)$, where $x \in \mathfrak{M}_0$ and $g(\lambda)$ is a quadratically integrable function with weight $f(\lambda)$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda < \infty \tag{6.3}$$

we can write (4.7) as follows:

$$\varphi_{vt} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \overline{g_v(\lambda)} f(\lambda)\, d\lambda \quad (1 \leqslant v \leqslant m). \tag{6.4}$$

If φ_{vt} can be presented in this way, then φ_{vt} represents the Fourier coefficients of a quadratically integrable function, namely, of the function $g_v(\lambda) f(\lambda)$ (recall that $f(\lambda)$ is bounded and $g_v(\lambda)$ fulfills (6.3)). Consequently, (6.2) is satisfied. Conversely, if (6.2) is satisfied, then there exists a quadratically integrable function $h_v(\lambda)$ such that

$$\varphi_{vt} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} \overline{h_v(\lambda)}\, d\lambda \quad (\lambda \leqslant v \leqslant m). \tag{6.5}$$

By putting

$$g_\nu(\lambda) = \frac{h_\nu(\lambda)}{f(\lambda)} \tag{6.6}$$

we can rewrite (6.5) in the form (6.4), where $g_\nu(\lambda)$ is quadratically integrable, bacause $f(\lambda)$ is bounded from zero. Thus, we have proved that when (6.2) is satisfied, it is possible to present $\varphi_{\nu t}$ in the form (6.4) with $g_\nu(\lambda)$ fulfilling (6.3) and $f(\lambda)$ fulfilling (6.1).

Now, (6.4) is equivalent to

$$\mathbf{E}_{\nu 1} x_t = \mathbf{E}_0 x_t \overline{v}_{\nu 1} \quad (1 \leqslant \nu \leqslant m). \tag{6.7}$$

which easily extends to (4.4). However, in view of (2.11), (4.4) is equivalent to (3.3), so that our assertion is completely proved.

Example 2. Let $\{x_t,\ A \leqslant t \leqslant B\}$ be a stationary process with continuous time-parameter t, $-\infty \leqslant A \leqslant B \leqslant \infty$. Suppose that the spectral density is rational, i. e.

$$f(\lambda) = \left| \frac{\sum_{k=1}^{r} b_k (i\lambda)^k}{\sum_{k=1}^{n} a_k (i\lambda)^k} \right|^2, \tag{6.8}$$

where $r < n$. The results derived in [8] imply that the model is regular if, and only if, the functions $\varphi_{\nu t}$ have derivatives up to the order $m - r$, and the $(m-r)$-th derivative $\varphi_{\nu t}^{(m-r)}$ is quadratically integrable:

$$\int_A^B |\varphi_{\nu t}^{(m-r)}|^2 dt < \infty. \tag{6.9}$$

Example 3. Let $\{x_t,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ be a stationary process with continuous time-parameter t. Suppose that the spectral density has the form

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\left| \sum_{k=0}^{n} a_k (i\lambda)^k \right|^2} \tag{6.10}$$

where $a_0, \ldots, a_n$ are real and all the roots of the equation $\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0$ have negative real parts. Introduce the following differential operators L and L^*:

$$(L\varphi)_t = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_t^{(k)}, \tag{6.11}$$

$$(L^*\varphi)_t = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \varphi_t^{(k)} \tag{6.12}$$

and the following inner product

$$(\psi, \varphi)_L = \int_0^T (L\psi)_t \overline{(L\varphi)_t} dt + 2 \sum_{k+j}^{n} \sum_{\text{odd}, k>j}^{n} a_k a_j \sum_{\nu=0}^{k-j-1} (-1)^\nu \psi_0^{(k-1-\nu)} \overline{\varphi}_0^{(j+\nu)} \tag{6.13}$$

defined on functions φ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, possessing quadratically integrable derivatives up to the order n.

In paper [8] it is shown that the solution $v_{\nu 1}$ of the equation (4.4) in our case is

$$v_{\nu 1} = (x, \varphi_\nu)_L \tag{6.14}$$

where $\int_0^T \overline{(L\varphi)_t}(Lx)_t\,dt$ should be interpreted as $\int_0^T \overline{(L\varphi)_t}\,d\left[L\int_0^t x_s ds\right]$. Note that $L\int_0^t x_s ds$ is a process with uncorrelated increments. Furthermore,

$$\mathbf{E}_0 v_{\nu 1}\bar{v}_{\mu 1} = (\varphi_\mu, \varphi_\nu)_L \quad (1 \leqslant \nu,\ \mu \leqslant m) \tag{6.15}$$

which gives the elements of the matrix D appearing in Theorem 4.2.

Let the functions $\varphi_{\nu t}$ $(1 \leqslant \nu \leqslant m)$ be linearly independent; let y be a random variable such that

$$\mathbf{E}_\alpha y = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \alpha_\nu \tag{6.16}$$

and that its variance and covariances with x_t are independent of $\alpha \in A_m$. Now, the projection y_0 of y on $\mathfrak{M}_0$ is determined by the relation

$$\mathbf{E}_0 x_t \bar{y}_0 = \mathbf{E}_0 x_t \bar{y} \qquad (t \in T) \tag{6.17}$$

i. e., in view of (4.7), y_0 equals the random variable v_{01} corresponding to the function

$$\varphi_{0t} = \mathbf{E}_0 x_t \bar{y}. \tag{6.18}$$

Consequently,

$$y_0 = (x, \varphi_0)_L \tag{6.19}$$

and, moreover,

$$\mathbf{E}_{\nu 1} y_0 = (\varphi_\nu, \varphi_0)_L \quad (1 \leqslant \nu \leqslant m) \tag{6.20}$$

so that

$$\theta_0(\alpha) = \mathbf{E}_\alpha (y - y_0) = \sum_{\nu=1}^{m} [c_\nu - (\varphi_\nu, \varphi_\nu)_L]\,\alpha_\nu$$

In view of (4.5) the best linear unbiassed estimate of y is

$$\hat{y} = (x, \varphi_0)_L + \sum_{\nu=1}^{m} [c_\nu - (\varphi_\nu, \varphi_0)_L]\,\hat{\alpha}_\nu \tag{6.21}$$

where $\hat{\alpha}_\nu$ are determined by (4.9), and $D = \|(\varphi_\mu, \varphi_\nu)_L\|$. Further, in view of (4.6) and (4.10) we have

$$\mathbf{E}_0 |y - \hat{y}_0|^2 = E_0 |y|^2 - (\varphi_0, \varphi_0)_L + (k_1, \ldots, k_m) D^{-1} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}, \tag{6.22}$$

where $k_\nu = c_\nu - (\varphi_\nu, \varphi_0)_L$, $1 \leqslant \nu \leqslant m$.

If the function φ_t possesses derivatives up to the order $2n$, we can write

(6.13) in the following alternative form:

$$(\psi, \varphi)_L = \int_0^T (L^* L\overline{\varphi})_t \psi_t dt +$$

$$+ \sum_{h=1}^{n} a_h \sum_{j+k=h-1} [(-1)^k (L\overline{\varphi})_T^k \psi_T^{(j)} + (-1)^j (L^*\overline{\varphi})_0^{(k)} \psi_0^{(j)}]. \qquad (6.23)$$

As it is shown in [8], explicit results may be obtained also in some other simple cases.

In conclusion, I wish to thank Prof. A. N. Kolmogorov for very helpful critisizm and suggestions.

Поступила в редакцию
19.9.60

REFERENCES

[1] U. Grenander, Stochastic processes and statistical inference, Arkiv för Matematik, **1** (1949), 195—277.

[2] L. A. Zadeh and J. R. Ragazzini, An Extention of Wiener's Theory of Prediction. Journ. Appl. Physics, **21** (1950), 645—655.

[3] А. М. Яглом, Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью, Труды Моск. мат. общ., **4** (1955), 333—374.

[4] M. Blum, Generalization of the class of nonrandom inputs of the Zadeh — Ragazzini prediction model, IRE Trans. Inform. theory, IT-2 (June 1956), 76—81.

[5] U. Grenander and M. Rosenblatt, Statistical analysis of stationary time series, Stockholm, 1956.

[6] Chiang Tse-pei, On the estimation of regression coefficients of a continuous parameter time series with a stationary residual, Теория вероят. и ее примен., **IV**, 4 (1959), 405—423.

[7] J. Hajek, On a simple linear model in Gaussian processes, Trans. Sec. Prague Conf. Inf. Th. etc., 1960.

[8] J. Hajek, Linear statistical problems in stochastic processes, to appear in Czech. Mat. Journal, 4 (1960).

[9] В. С. Пугачев, Теория случайных функций и ее применения к задачам автоматического управления, Физматгиз, М., 1960.

К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОЦЕНОК ПРИ БЕСКОНЕЧНОМ КОЛИЧЕСТВЕ НАБЛЮДЕНИЙ

Я. ГАЕК (ПРАГА)

(Резюме)

Рассматривается вероятностный процесс, подверженный тренду, который представляет собой линейную комбинацию конечного числа заданных функций (коэффициенты линейной комбинации предполагаются неизвестными). Среди линейных функционалов от вероятностного процесса требуется найти наилучшую несмещенную оценку для линейной формы от неизвестных коэффициентов. Существование подобных оценок устанавливается теоремой 3.1. Полученные результаты являются естественным обобщением классической теории способа наименьших квадратов на случай Гильбертова пространства. Данную задачу можно рассматривать также и как обобщение известной задачи Заде и Рагаццини [2] об оценке полиномиального тренда на фоне стационарного сигнала и стационарного шума.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том VI Выпуск 2
1961

НЕОДНОРОДНЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА

Т. А. САРЫМСАКОВ

1. Стохастическую матрицу* P отнесем к классу K, если для ее элементов выполняется соотношение:

$$\sup_{i,j,\ A\in\mathfrak{A}} \left| \sum_{k\in A} p_{ik} - \sum_{k\in A} p_{jk} \right| = 1 - \lambda_p \,(\lambda_p > 0); \tag{1}$$

число λ_p называют коэффициентом эргодичности матрицы P. Порядок матрицы P обозначим через (m, n). Все результаты, полученные до сих пор различными авторами [1, 4, 5, 7—12] по неоднородным цепям Маркова, велись, в основном, в пределах класса K. Матрицу P порядка (m, n) из класса K отнесем к классу $K^{(s)}$, если выполняется для нее соотношение:

$$\max(m, n) \leqslant s\ (\geqslant 2).$$

Легко видеть, что $K^{(s)} \subset \mathfrak{N}^{(s)}$.

Если матрица P принадлежит классу $\mathfrak{N}^{(s)}$, но не принадлежит классу $K^{(s)}$, то коэффициент эргодичности матрицы P в указанном выше смысле равен нулю. Поэтому применительно к таким матрицам мы будем пользоваться определением коэффициента эргодичности, введенного в [13] и называемого слабым коэффициентом эргодичности.

В дополнение к леммам 1—3 из статьи [15] приведем еще следующее предложение.

Лемма 1. *Пусть даны* $s-1$ *стохастических матриц*

$$P_1, P_2, \ldots, P_{s-1}, \tag{2}$$

принадлежащих классу $\mathfrak{N}^{(s)}$, *при этом число столбцов матрицы* P_i *равно числу строк матрицы* P_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, s-2)$.

Пусть затем a *и* b *— любая пара не пересекающихся между собой строк в матрице* P_1.

Тогда в матрице $P = P_1 * P_2 * \ldots * P_{s-1}$ *строки* a *и* b *будут пересекаться на множестве положительной вероятностной меры. Число* $s-1$ *не может быть, вообще говоря, понижено.*

Доказательство. Через $A_1 = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_{k_1})$ и $B_1 = (b'_1, b'_2, \ldots, b'_{h_1})$ обозначим векторы с компонентами a'_i и b'_j, для которых выполняются соот-

* Определение стохастической матрицы, T-матрицы, пересекающихся и непересекающихся строк матрицы и совокупности $\mathfrak{N}^{(s)}$ мы заимствуем из [15]. Существенным дополнением к этой работе является статья [16].

ошения

$$p^{[1]}_{aa'_i} > 0\,(i = \overline{1,k_1}) \quad \text{и} \quad p^{[1]}_{bb'_j} > 0\,(j = \overline{1,h_1}),$$

де через $p^{[h]}_{ij}$ обозначаются элементы матрицы P_h. Очевидно, $a'_i \neq b'_j$, каковы ы ни были $i = 1, 2, \ldots, k_1$ и $j = 1, 2, \ldots, h_1$, ибо в противном случае праведливость утверждения леммы не нуждалась бы в доказательстве. ерез $A_2 = (a''_1, a''_2, \ldots, a''_{k_2})$ и $B_2 = (b''_1, b''_2, \ldots, b''_{h_2})$ обозначим векторы для омпонент которых выполняются условия: а) для любого $a''_j\,(j = \overline{1,k_2})$ най-ется $a'_i\,(i = \overline{1,k_1})$ такое, что $P^{[2]}_{a'_i a''_j} > 0$ и б) для любого $b''_l\,(l = \overline{1,h_2})$ найдется $(k = \overline{1,h_1})$ такое, что $P^{[2]}_{b'_k b''_l} > 0$. При этом опять $a''_j \neq b''_l$, каковы бы ни ыли $j = 1, 2, \ldots, k_2$ и $l = 1, 2, \ldots, h_2$, ибо в противном случае уже матрице $P_1 * P_2$ строки a и b оказались бы пересекающимися. Продолжим указанному выше правилу выделение векторов: A_1, B_1, A_2, B_2 и т. д., усть построены векторы:

$$A_3 = (a'''_1, a'''_2, \ldots, a'''_{k_3}),\ B_3 = (b'''_1, b'''_2, \ldots, b'''_{h_3}),\ \ldots,$$

$$A_{s-1} = (a^{(s-1)}_1, a^{(s-1)}_2, \ldots, a^{(s-1)}_{k_{s-1}}),\ B_{s-1} = (b^{(s-1)}_1, b^{(s-1)}_2, \ldots, b^{(s-1)}_{h_{s-1}}).$$

окажем, что в векторах A_{s-1} и B_{s-1} будет по крайней мере по одной ком-оненте, которые будут равны между собой, т. е. хотя бы при одном ачении $i = 1, 2, \ldots, k_{s-1}$ и $j = 1, 2, \ldots, h_{s-1}$ имеет место равенство $^{(s-1)} = b^{(s-1)}_j$, иначе говоря в матрице P строки a и b будут пересекаться. ля этого достаточно доказать, что

$$k_1 + h_1 \geqslant 3 \tag{3}$$

если векторы A_r и B_r не содержат равные компоненты, то

$$k_r + h_r < k_{r+1} + h_{r+1}\,(r + 1 \leqslant s + 1). \tag{4}$$

1) Докажем неравенство (3). Прежде всего случай $k_1 = 0$ или $h_1 = 0$, евидно, исключается в силу стохастичности рассматриваемых матриц; оэтому остается рассмотреть только случай $k_1 = 1$ и $h_1 = 1$. В этом случае $^{[1]}_{aa'_1} = 1$ и $p^{[1]}_{bb'_1} = 1$.

Отсюда: или $a'_1 = b'_1$, что невозможно в силу того, что строки a и b не ересекаются, или $a'_1 \neq b'_1$, что также невозможно, ибо в этом случае матрица $_1$ имела бы вид, который заведомо исключен условием леммы 2, состоя-им в том, что $P_1 \in \mathfrak{N}^{(s)}$.

2) Докажем теперь неравенство (4). Пусть, напротив,

$$k_r + h_r \geqslant k_{r+1} + h_{r+1}. \tag{5}$$

огласно определению векторов A_h и B_h при переходе от векторов A_r и B_r ответственно к векторам A_{r+1} и B_{r+1} мы пользуемся матрицей P_{r+1}, для оторой, как нетрудно видеть, выполняются соотношения:

$$p^{[r+1]}_{a^{(r)}_i a^{(r+1)}_j} \geqslant 0 \quad \text{для } i = 1, 2, \ldots, k_r \text{ и } j = 1, 2, \ldots, k_{r+1}, \tag{6}$$

$$p^{[r+1]}_{b^{(r)}_i b^{(r+1)}_j} \geqslant 0 \quad \text{для } i = 1, 2, \ldots, h_r \text{ и } j = 1, 2, \ldots, h_{r+1}, \tag{7}$$

$$p_{a_i^{(r)} b_j^{(r+1)}}^{[r+1]} = 0 \quad \text{для } i = 1, 2, \ldots, k_r \text{ и } j = 1, 2, \ldots, h_{r+1}, \tag{8}$$

$$p_{b_i^{(r)} a_j^{(r+1)}}^{[r+1]} = 0 \quad \text{для } i = 1, 2, \ldots, h_r \text{ и } j = 1, 2, \ldots, k_{r+1}. \tag{9}$$

Из этих соотношений непосредственно следует, что матрица P_{r+1} должна иметь вид:

$$P_{r+1} = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 \\ L_1 & L_2 & L_3 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где поле Q_1 состоит из элементов, удовлетворяющих соотношениям (6), и содержит k_r строк и k_{r+1} столбцов, поле Q_2 состоит из элементов, удовлетворяющих соотношениям (7), и содержит h_r строк и h_{r+1} столбцов, и поля L_1, L_2 и L_3 охватывают оставшиеся после выделения полей Q_1 и Q_2, строки, которые, вообще говоря, неотрицательны. В силу (5) и (10) матрица P_{r+1} приобретает вид $P = \begin{pmatrix} T & 0 \\ L_1 & L_2 \end{pmatrix}$, что противоречит условию леммы 2, которое состоит в том, что $P_i \in \mathfrak{N}^{(s)}$ $(i = 1, 2, \ldots, s-1)$.

Таким образом, неравенство (4) доказано.

Наконец, из неравенств (3) и (4) непосредственно следует, что векторы A_{s-1} и B_{s-1} содержат совпадающие компоненты, т. е. любые две строки в матрице P будут пересекаться. Следовательно, первая часть леммы 2 доказана.

Для доказательства справедливости второй части утверждения леммы 1 приведем пример:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ x & x & 0 \\ x & x & x \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ x & x & x \end{pmatrix},$$

$$P = P_1 * P_2 = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}.$$

Значком x отмечены положительные элементы. Легко видеть, что $P_1 \in \mathfrak{N}^{(3)}$ и $P_2 \in \mathfrak{N}^{(3)}$ и в матрице P все три строки пересекаются между собой.

Замечание. Из доказательства нетрудно видеть, что утверждение леммы 1 сохранится, если некоторые из матриц P_i $(i = \overline{1, s-1})$ принадлежат классу $\mathfrak{N}^{(m)}$ при $m < s$, но с сохранением остальных условий леммы.

Лемма 2. *Пусть стохастические матрицы $P_1, P_2, \ldots, P_h$ принадлежат классу $\mathfrak{N}^{(s)}$, но не принадлежат классу $K^{(s)}$, и пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ соответственно — их слабые коэффициенты эргодичности. Тогда слабый коэффициент эргодичности для матрицы $P = P_1 * P_2 * \ldots * P_h$ будет не меньше, чем $\lambda = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_h$.*

Доказательство этой леммы является непосредственным следствием леммы 1 и определения слабого коэффициента эргодичности для матриц $P_i \in \mathfrak{N}^{(s)}$ $(i = \overline{1, h})$.

Заметим еще, что не исключается случай, когда слабый коэффициент эргодичности для P, если $P \in K^{(s)}$ (это непременно выполняется при $h \geq s-1$

в силу леммы 1), может оказаться равным коэффициенту эргодичности в смысле определения п. 1, используемого применительно к матрицам, входящим в класс K. Однако в случае, если матрица P принадлежит классу $K^{(s)}$, следовательно, и классу $\mathfrak{N}^{(s)}$, очевидно, коэффициент эргодичности ее в смысле определения п. 1 не меньше, чем слабый ее коэффициент эргодичности.

2. Будем рассматривать последовательность случайных величин

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \tag{11}$$

связанных в простую цепь Маркова и управляемую последовательностью стохастических матриц

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots \tag{12}$$

Пусть абсолютные математические ожидания случайных величин x_i равны нулю. Введем обозначения (последние мы заимствуем из [3])

$$s_n = \sum_{h=1}^{n} x_h, \; B_n = \mathbf{D}s_n;$$

$$\alpha_h(a_i^{(h-1)}, a_l^{(h+1)}), \; b_h(a_i^{(h-1)}, a_l^{(h+1)}), \; \overline{b}_h(a_i^{(h-1)}) \text{ и } \underline{b}_h.$$

Предположим еще, что рассматриваемые нами условные законы распределения вероятностей величин x_h, т. е. вероятности перехода $P_{ij}^{[h]}$, зависят, кроме индекса h, еще и от числа n слагаемых суммы s_n. Одним из важных неравенств, установленных С. Н. Бернштейном [3], является следующее:

$$B_n \geqslant \frac{1}{2}(\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \ldots + \underline{b}_n). \tag{13}$$

Пусть затем $i = i_0$—тот индекс, при котором $\overline{b}_h(a_i^{(h-1)})$ достигает своего минимума. Тогда, очевидно, (см. [3])

$$\overline{b}_h \geqslant \sum_{j,l} p_{i_0 j}^{[h]} p_{jl}^{[h+1]} [a_j^{(h)} - \alpha_h(l)]^2, \tag{14}$$

где

$$\alpha_h(l) = \alpha_h(a_{i_0}^{(h-1)}, a_l^{(h+1)}).$$

Далее предположим, что

(А) Матрица $P_h \in K^{(s)}$, $h = 1, 2, \ldots$, имеет коэффициент эргодичности не меньший, чем λ_n, и для любой строки с номером $i \leqslant s$ существуют столбцы с номерами j_1 и $j_2 \neq j_1$, зависящие от i, такие, что

$$p_{ij_1}^{[h]} \geqslant \lambda_n \quad \text{и} \quad p_{ij_2}^{[h]} \geqslant \lambda_n. \tag{15}$$

(Б) Каковы бы ни были уже известные значения некоторых величин x_h, можно указать такие числа L_q, что для $h > k$ математическое ожидание $|x_h^q|$, где q — любое целое число, остается меньше L_q.

В дальнейшем мы будем пользоваться также одной предельной теоремой, имеющейся в работах С. Н. Бернштейна [2] и Н. А. Сапогова [10]; когда будем ссылаться на эту теорему ради краткости будем писать «теорема Б — С».

Для принятой в этом пункте системы изложения коэффициент эргодичности для матриц конечного порядка из класса $K^{(s)}$, введенный в п. 1, заменим эквивалентным ему следующим определением: пусть $P = \|p_{ij}\|$ стохастическая матрица конечного порядка; число $\lambda > 0$ называется коэффициентом эргодичности матрицы P, если для любой пары строк с номерами i и j существует столбец с номером k, зависящий, вообще говоря, от i и j, такой, что

$$p_{ik} \geqslant \lambda \text{ и } p_{jk} \geqslant \lambda;$$

т. е. для любой пары строк существует хотя бы один столбец, на пересечении которого с этими строками находятся положительные элементы не меньше, чем λ.

Теперь сформулируем и докажем ряд предельных теорем.

Теорема 1. *Если выполнены условия* (А), (Б), $\lambda_n \geqslant n^{-\alpha}$ *и, кроме того, условие*

$$\text{(а)} \quad \left|a_{j_1}^{(h)} - a_{j_2}^{(h)}\right| \geqslant d > 0 \quad (j_1 = j_1(i_0),\ j_2 = j_2(i_0)),$$

где d — постоянное, то к сумме s_n применима центральная предельная теорема при $\alpha < \frac{1}{7}$.

Доказательство. В силу условия (А) неравенство (14) можно переписать в форме:

$$\overline{b}_h \geqslant p_{i_0 j_1}^{[h]} \left\{p_{j_1 l_0}^{[h+1]}\left[a_{j_1}^{[h]} - \alpha_h(l_0)\right]^2 + p_{j_1 l_1}^{[h+1]}\left[a_{j_1}^{(h)} - \alpha_h(l_1)\right]^2\right\} +$$
$$+ p_{i_0 j_2}^{[h]} \left\{p_{j_2 l_0}^{[h+1]}\left[a_{j_2}^{(h)} - \alpha_h(l_0)\right]^2 + p_{j_2 l_2}^{[h+1]}\left[a_{j_2}^{(h)} - \alpha_h(l_2)\right]^2\right\}, \tag{16}$$

где l_0 — номер столбца, на котором пересекаются строки с номерами j_1 и j_2 в матрице P_{h+1}. Отсюда в силу неравенств (15) и (а), в свою очередь, имеем:

$$\overline{b}_h \geqslant \lambda_n^2 \left\{[a_{j_1}^{[h]} - \alpha_h(l_0)]^2 + [a_{j_2}^{[h]} - \alpha_h(l_0)]^2\right\} \geqslant \frac{d^2}{2}\lambda_n^2. \tag{17}$$

Из неравенства (13) в силу (17) получим:

$$B_n \geqslant \frac{d^2}{4} n \lambda_n^2 \geqslant \frac{d^2}{4} n^{1-2\alpha}, \tag{18}$$

ибо $\lambda_n \geqslant \frac{1}{n^\alpha}$ по условию.

Теперь доказательство теоремы 1 легко сводится к теореме Б — С. Для этого проверим выполнение всех трех условий теоремы Б — С. Выполнение условия (1) следует из неравенства (18). Выполнение условий (2) и (3) проверяется без труда. Так как, с другой стороны, в теореме Б — С требуется, чтобы выполнялось неравенство (см. [2])

$$\rho < \frac{2\lambda - 1}{3} = \frac{2(1-2\alpha) - 1}{3} = \frac{1 - 4\alpha}{3},$$

то из неравенств $\alpha < \rho < \frac{1-4\alpha}{3}$ следует, что должно быть $\alpha < \frac{1}{7}$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (А), (Б) *и* $\lambda_n \geqslant n^{-\alpha}$ *и, кроме того, условия*:

(б) *при любых i и h, или*

$$\max\left(p_{i,j_1}^{[h]},\ p_{j_1 l_0}^{[h+1]}\right) \geqslant c > 0,$$
$$\left|a_{j_1}^{(h)} - \alpha_h\left(a_i^{(h-1)},\ a_{l_0}^{(h+1)}\right)\right| \geqslant d > 0,$$

или

$$\max\left(p_{i\,j_2}^{[h]},\ p_{j_2 l_0}^{[h+1]}\right) \geqslant c > 0,$$
$$\left|a_{j_2}^{(h)} - \alpha_h\left(a_i^{(h-1)},\ a_{l_0}^{(h+1)}\right)\right| \geqslant d > 0,$$

где c и d — постоянные и l_0 — номер столбца, на котором пересекаются строки с номерами j_1 и j_2 в матрице P_{h+1}, то к сумме s_n применима центральная предельная теорема при $\alpha < \frac{1}{5}$.

Доказательство. В этом случае из (13) и (16), используя условие (б), без труда выводим, что

$$B_n \geqslant c\frac{d^2}{n^\alpha} \cdot n = cd^2 n^{1-\alpha}. \tag{19}$$

Из неравенств $\alpha < \rho < \frac{2(1-\alpha)-1}{3} = \frac{1-2\alpha}{3}$ вытекает, что $\alpha < \frac{1}{5}$.

Теорема 3. *Если в теореме 2, сохранив все условия, заменить условия* (б) *условиями*:

(в) *при любых i и h или*

$$\begin{cases} \min\left(p_{ij_1}^{[h]},\ p_{j_1 l_0}^{[h+1]}\right) \geqslant c > 0, \\ \left|a_{j_1}^{(h)} - \alpha_h\left(a_i^{(h-1)},\ a_{l_0}^{(h+1)}\right)\right| \geqslant d > 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \min\left(p_{ij_2}^{[h]},\ p_{j_1 l_0}^{[h+1]}\right) \geqslant c > 0, \\ \left|a_{j_2}^{(h)} - \alpha_h\left(a_i^{(h-1)},\ a_{l_0}^{(h+1)}\right)\right| \geqslant d > 0, \end{cases}$$

то к сумме s_n центральная предельная теорема применима при $\alpha < \frac{1}{3}$.

Доказательство. В этом случае из тех же неравенств (13) и (16), используя условие (в), легко получить неравенство

$$B_n \geqslant cd^2 n, \tag{20}$$

которое опять обеспечивает выполнение условия 1) теоремы Б — С; для проверки выполнения условия 3) достаточно подчинить α неравенству $\alpha < \frac{1}{3}$. В остальном ход рассуждений остается таким же, как и в теореме 1.

Замечание. Теоремы 1—3 остаются справедливыми, если в них условие (А) заменить условием (А′), а именно:

(А′) $P_h \in \mathfrak{N}^{(s)}$ $(h = 1, 2, \ldots)$,

имеет слабый коэффициент эргодичности $\lambda_{h,n}$ и для любой строки с номером $i \leqslant s$ среди $s-1$ матриц

$$P_{(k-1)s-k+2},\ P_{(k-1)s-k+3},\ \ldots,\ P_{k(s-1)},$$

при любом $k = 1, 2, \ldots$ существует хотя бы одна пара соседних матриц P_t и P_{t+1} $((k-1)s - k + 2 \leqslant t < k(s-1))$ таких, что у матрицы P_t имеются столбцы с номерами $j_1 = j_1(i)$, $j_2 = j_2(i) \neq j_1$, для которых выполняются соотношения

$$p_{ij_1}^{[t]} \geqslant \overline{\lambda}_{k,n},\ p_{ij_2}^{[t]} \geqslant \overline{\lambda}_{k,n}, \tag{15′}$$

$$p_{j_1 l_0}^{[t+1]} \geqslant \overline{\lambda}_{k,n},\ p_{j_2 l_0}^{[t+1]} \geqslant \overline{\lambda}_{k,n}, \tag{16′}$$

где l_0 — номер столбца, на котором пересекаются строки с номерами j_1 и j_2

в матрице P_{t+1} и

$$\overline{\lambda}_{k,n} = \lambda_{(k-1)s-k+2,n}\,\lambda_{(k-1)s-k+3,n)}\ldots\lambda_{(s-1)k,n}.$$

В силу леммы 1 и замечания, сделанного в самом конце леммы 2, коэффициент эргодичности матрицы

$$\overline{P}_k = P_{(k-1)s-k+2} * P_{(k-1)s-k+3} * \ldots * P_{k(s-1)}$$

будет не меньше, чем $\overline{\lambda}_{k,n}$ и $\overline{P}_k \in K^{(s)}$.

Для примера сформулируем аналог теоремы 1:

Теорема 1′. *Если выполнены условия* (A′), (Б), $\overline{\lambda}_{k,n} \geqslant \frac{1}{n^{\alpha}}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *и, кроме того,* $|a_{j_1}^{(t)} - a_{j_2}^{(t)}| \geqslant d > 0$ *(здесь индексы* j_1, j_2 *и* t *те же, что и в условии* (A′) *и* d *— постоянное), то к сумме* s_n *применима центральная предельная теорема при* $\alpha < \frac{1}{7}$.

3. Теперь применительно к последовательности случайных величин (11), связанных в цепь Маркова и управляемых последовательностью стохастических матриц (12), нетрудно доказать теорему о повторном логарифме. При этом будем придерживаться определений и обозначений предыдущего параграфа.

Теорема 4. *Если выполнены условия*

(A), $\lambda_n \geqslant \mu > 0$, $|a_{j_1}^{(h)} - a_{j_2}^{(h)}| \geqslant d > 0$, *и* $|X_h| \leqslant L$ $(h = 1, 2, \ldots)$, *где* μ, d *и* L *постоянные, не зависящие от* n, *то к последовательности сумм* s_n, *составленных из случайных величин* (11), *применим закон повторного логарифма.*

Доказательство проводится с помощью теорем С. Н. Бернштейна ([2], теорема 13, § 10) и Н. А. Сапогова ([12], п. 6). Подобно теореме 1′, представляющей обобщение теоремы 1, легко сформулировать и доказать теорему, обобщающую теорему 4 на класс стохастических матриц $\mathfrak{N}^{(s)}$. А именно справедлива

Теорема 5. *Если выполнены условия* (A′),

$$\overline{\lambda}_{k,n} \geqslant \mu > 0, \quad |a_{j_1}^{(h)} - a_{j_2}^{(h)}| \geqslant d > 0$$

и

$$|x_h| \leqslant L \quad (h = 1, 2, \ldots),$$

где μ, d *и* L *— постоянные, не зависящие от* n, *то к последовательности сумм* s_n *применим закон повторного логарифма.*

Легко видеть, что теоремы 4 и 5 являются обобщением теоремы Н. А. Сапогова (см. [12], стр. 178, теорема 4).

В заключение статьи заметим, что некоторые из доказанных в пункте 2 предельных теорем можно перенести и на последовательности конечно-мерных случайных векторов. Не останавливаясь сколько-нибудь подробно на этих обобщениях, мы ограничимся здесь лишь ссылкой на одну теорему, которая была сформулирована в статье автора (см. [14], теорема 6).

Поступила в редакцию
3.2.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, Гостехиздат, 1946.
[2] С. Н. Бернштейн, Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин, Успехи матем. наук, **X** (1944), 65—114.
[3] С. Н. Бернштейн, Determination d'une limite inferieure de la dispersion des sommes de grandeures liees en chaine singuliere, Матем. сб., *1* (43) (1936), 29—38.
[4] Е. Б. Дынкин, О некоторых предельных теоремах для цепей Маркова, Укр. матем. ж., **6** (1954), 21—27.
[5] Р. Л. Добрушин, Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова I, II, Теория вероят. и ее примен., **I**, 1 и 4 (1956), 12—89; 365—425.
[6] А. Н. Колмогоров, Об аналитических методах в теории вероятностей, Успехи матем. наук, **5** (1938) 5—41.
[7] Ю. В. Линник. О неоднородных цепях Маркова, ДАН СССР, **LX**, 1 (1948), 21—24.
[8] Ю. В. Линник, К теории неоднородных цепей Маркова, Изв. АН СССР, сер. матем., **XIII**, 1 (1949), 65—94.
[9] Ю. В. Линник, Н. А. Сапогов, Многомерные интегральный и локальный законы для неоднородных цепей Маркова, Изв. АН СССР, сер. матем., **XIII**, 6 (1949), 533—566.
[10] Н. А. Сапогов, Предельная теорема Лапласа—Ляпунова для сингулярной цепи Маркова, ДАН СССР, **LVIII**, 9 (1947), 1905—1908.
[11] Н. А. Сапогов, О многомерных неоднородных цепях Маркова, ДАН СССР, **LXIX**, 2 (1949), 133—135.
[12] Н. А. Сапогов, Закон повторного логарифма для сумм зависимых величин, Ученые записки Ленинградского университета, серия матем., 19 (1950), 160—179.
[13] Т. А. Сарымсаков, Об эргодическом принципе для неоднородных цепей Маркова, ДАН СССР, **XC**, 1 (1953), 25—28.
[14] Т. А. Сарымсаков, К теории неоднородных цепей Маркова, ДАН УзССР, 8 (1956), 3—7.
[15] Т. А. Сарымсаков, О неоднородных цепях Маркова, ДАН СССР, **CXX**, 3 (1958), 465—468.
[16] Т. А. Сарымсаков, Х. А. Мустафин, К эргодической тесреме для неоднородных цепей Маркова, Ташкент, Тр. Среднеазиатск. госуниверситета, 74, физ.-матем. науки, 15 (1957), 1—38.

INHOMOGENEOUS MARKOV CHAINS

T. A. SARIMSAKOV (TASHKENT)

(Summary)

This paper discusses some new results related to ergodic and limit theorems and also to the repeated logarithm low for inhomogeneous Markov chains. Theorems are formulated and proved for conditions that were not treated in the literature; some estimates obtained previously by S. N. Bernstein are employed.

Lemma 1 is of most importance in the paper.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том VI И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 2
1961

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ. II*

В. А. ВОЛКОНСКИЙ, Ю. А. РОЗАНОВ

§ 3. Предельные распределения для числа пересечений высокого уровня стационарным гауссовским процессом

1. Пусть ξ_t — стационарный процесс с непрерывным временем, и $\eta_a(\Delta)$ — число пересечений снизу вверх уровня a на интервале времени $\Delta = [s, t]$. В случае процесса ξ_t с дискретным временем под $\eta_a(\Delta)$ можно понимать либо число пересечений снизу вверх уровня a ломаной, соединяющей точки (t, ξ_t), либо число моментов времени, в которые $\xi_t \geqslant a$.

Как уже отмечалось в примере 1.5, при довольно общих условиях для величин

$$\zeta_a(\Delta) = \eta_a\left(\frac{\Delta}{\lambda_a}\right),$$

где $\lambda_a = \mathbf{M}\eta_a(0, 1)$, выполняется соотношение (1.37′): при $a \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\zeta_a(\Delta_1) = k_1, \ldots, \zeta_a(\Delta_m) = k_m\} \to \frac{\tau_1^{k_1} \ldots \tau_m^{k_m}}{k_1! \ldots k_m!} e^{-(\tau_1 + \ldots + \tau_m)}$$

для любых непересекающихся интервалов $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$; $\Delta_l = (s_l, t_l)$, $t_l - s_l = \tau_l$. Теоремы этого параграфа дают более простые достаточные условия, при которых выполняются эти соотношения для гауссовского стационарного процесса.

В случае гауссовского процесса функция λ_a может быть выражена явно через корреляционную функцию, и поэтому соотношение (1.37′) принимает более конкретный вид. Если ξ_t — процесс с непрерывным временем с корреляционной функцией r_t и $r_0^{(4)}$ (четвертая производная r_t при $t = 0$) существует, то

$$\lambda_a = \sqrt{\frac{-r_0''}{r_0}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{a^2}{2r_0}} \tag{3.1}$$

(см. [12], [13], [14]). Если ξ_t — процесс с дискретным временем, и $\eta_a(\Delta)$ — число моментов времени t, в которые $\xi_t \geqslant a$, то

$$\lambda_a = \mathbf{P}(\xi_0 \geqslant a) = 1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{r_0}}\right), \tag{3.2}$$

---

* Начало см. «Теория вероятностей и ее применения», IV, вып. 2 (1959).

где $\Phi(a)$ — функция нормального распределения с параметрами (0,1). Если $\eta_a'(\Delta)$ — число пересечений уровня a снизу вверх случайной ломаной, то

$$\lambda_a' = \mathbf{P}(\xi_0 < a,\ \xi_1 \geqslant a) = \mathbf{P}(\xi_1 \geqslant a) - \mathbf{P}(\xi_0 \geqslant a,\ \xi_1 \geqslant a).$$

Легко проверить, что величины λ_a и λ_a' эквивалентны при $a \to \infty$. Из этого следует, что величины $\eta_a(\Delta/\lambda_a)$ и $\eta'(\Delta/\lambda_a)$ имеют одинаковые предельные распределения при $a \to \infty$, так как

$$\mathbf{M}\left|\eta_a\left(0, \frac{t}{\lambda_a}\right) - \eta_a'\left(0, \frac{t}{\lambda_a}\right)\right| = \left(1 - \frac{\lambda_a'}{\lambda_a}\right) t \to 0.$$

Так как нас интересует только асимптотическое поведение этих величин при $a \to \infty$, то в дальнейшем нам нет надобности уточнять, какое определение величин $\eta_a(\Delta)$ мы имеем в виду.

В качестве функции λ_a мы всегда можем брать $1 - \Phi(a/\sqrt{r_0})$.

Теорема 3.1. *Пусть ξ_t — гауссовский процесс с непрерывным временем, и для него существует $r_0^{(4)}$, или гауссовский процесс с дискретным временем. Если при некотором $\varepsilon > 0$*

$$\alpha(\tau) = O(\tau^{-\varepsilon}) \quad (\tau \to \infty), \tag{3.3}$$

то выполняется соотношение (1.37′).

В § 4 выводится оценка для скорости стремления к нулю величины $\beta(\tau)$ для процесса ξ_t с дискретным временем, когда спектральная плотность положительна. Из теорем 3.1 и 4.2 вытекает

Теорема 3.2. *Если спектральная плотность гауссовской случайной последовательности ξ_t положительна, и при некотором $\varepsilon > 0$*

$$r_t = O(t^{-2-\varepsilon}) \quad (t \to \infty),$$

то выполняется соотношение (1.37′).

Доказательство теоремы 3.1 мы проведем для процесса с непрерывным временем. Для процесса с дискретным временем доказательство аналогично и гораздо проще. Мы его опускаем. Пусть функция $\varphi_a(t)$ определяется равенством (1.34′).

Лемма 3.1. *Если при некотором $\varepsilon > 0$*

$$\alpha(\tau) = o(\tau^{-\varepsilon}) \quad (\tau \to \infty)$$

и при $a \to \infty$

$$\varphi_a\left(\lambda_a^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right) \to 0, \tag{3.4}$$

то имеет место соотношение (1.37′).

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству теоремы 1.3, если положить

$$\Delta = \lambda_a^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}, \quad \Delta' = o\left(\lambda_a^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right),$$

причем так, чтобы при $a \to \infty$

$$\frac{1}{\Delta}\alpha(\Delta'/\lambda_a) \to 0, \quad \varphi_a(\Delta) \to 0.$$

Выведем оценку для $\mathbf{M}\,\eta_a^2(0, T)$, которая нам понадобится для доказательства соотношения (3.4).

Через $p_\xi(x)$ мы будем везде обозначать плотность распределения случайной величины ξ (ξ может быть векторной величиной), а через $p_\xi(x \mid \eta = y)$ — плотность условного распределения при условии, что $\eta = y$. Обозначим $\dot{\xi}_t = d\xi_t/dt$, $\ddot{\xi}_t = d^2\xi_t/dt^2$ и

$$p(a, t) = \int_0^\infty x\,dx \int_0^\infty y\,p_{\xi_0, \xi_t, \dot{\xi}_0, \dot{\xi}_t}(a,\ a,\ x,\ y)\,dy. \tag{3.5}$$

Лемма 3.2. *Если ξ_t — гауссовский процесс, и $r_0^{(4)}$ существует, то*

$$\mathbf{M}\,\eta_a^2(0, T) \leqslant \mathbf{M}\eta_a(0, T) + \int_0^T ds \int_0^T p(a, t - s)\,dt. \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть $\tau_j(\omega)$ — момент j-го пересечения уровня a после момента 0 процессом ξ_t. Тогда *

$$\mathbf{M}\eta_a^2(0, T) = \mathbf{M}\eta_a(0, T) + \mathbf{M} \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{\tau_j \in [0, T]} [\eta_a[0, \tau_j - \varepsilon) + \eta_a(\tau_j + \varepsilon, T)] =$$

$$\mathbf{M}\eta_a(0, T) + \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{M} \sum_{\tau_j \in [0, T]} [\eta_a(0, \tau_j - \varepsilon) + \eta_a(\tau_j + \varepsilon, T)]. \tag{3.7}$$

Здесь переход к пределу после взятия математического ожидания законен, так как при $\varepsilon \downarrow 0$ случайные величины

$$\sum [\eta_a(0, \tau_j - \varepsilon) + \eta_a(\tau_j + \varepsilon, T)]$$

монотонно возрастают. Обозначим

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n, & |x| \leqslant \dfrac{1}{2n}, \\ 0, & |x| > \dfrac{1}{2n}, \end{cases} \qquad \sigma(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}$$

Тогда, почти наверное,

$$\sum [\eta_a(0, \tau_j - \varepsilon) + \eta_a(\tau_j + \varepsilon, T)] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_0^T \varphi_n(\xi_t - a)\,\sigma(\dot{\xi}_t) \sum_{\substack{0 < s < T \\ |s - t| > \varepsilon}} \varphi_n(\xi_s - a)\,\sigma(\dot{\xi}_s)\,ds\,dt. \tag{3.8}$$

---

* Используя леммы 3.2 и 3.3 и то обстоятельство, что величина $\int_u^v \varphi_n(\xi_t - a)\,\sigma(\dot{\xi}_t)\,dt$ при любом n не превосходит числа нулей функции $\dot{\xi}_t$ на отрезке $[u, v]$, можно доказать следующую теорему.

Теорема *Если ξ_t — стационарный регулярный гауссовский процесс, и $r_0^{(6)}$ существует, то,*

$$\mathbf{M}\eta_a^2(0, T) = \mathbf{M}\eta_a(0, T) + \int_0^T \int_0^T p(a, t - s)\,dt\,ds.$$

Из работы [14] вытекает, что $\eta_a(0, T)$ конечно почти наверное.

Доказательство (3.8) аналогично доказательству леммы 1 работы [14]. По лемме Фату (см., например, [16], стр. 114) получаем

$$\mathbf{M} \sum_{0 \leqslant \tau_j < T} [\eta_a(0, \tau_j - \varepsilon) + \eta_a(\tau_j + \varepsilon, T)] \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n \to \infty} \mathbf{M} \int_0^T \varphi_n(\xi_t - a)\sigma(\xi_t) \int_{\substack{0<s<T \\ |s-t|>\varepsilon}} \varphi_n(\xi_s - a)\sigma(\xi_s)\, ds\, dt. \qquad (3.9)$$

Легко проверить, что правая часть (9.3) равна

$$\int_0^T dt \int_{\substack{0<s<T \\ |s-t|>\varepsilon}} ds \int_0^\infty x dx \int_0^\infty y dy p_{\xi_s, \xi_t, \dot{\xi}_s, \dot{\xi}_t}(a, a, x, y).$$

Сопоставление (3.7) и (3.9) доказывает лемму.

Лемма 3.3. *Если ξ_t — регулярный гауссовский процесс, $\mathbf{M}\xi_t = 0$, $D\xi_t = 1$ и $r_0^{(4)}$ существует, то при $t > 0$*

$$p(a, t) \leqslant C \exp\left\{-\frac{a^2}{1 + r_t}\right\},$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от a и t.

Доказательство. Повторяя почти дословно выкладки Райса (см. [15]), получим

$$p(a, t) = \mathbf{M}\eta_a(0,1)\, A(t)\, I(b, h) \exp\left\{-\frac{a^2}{1 + r_t}\right\},$$

где

$$A(t) = \frac{r_0''(1 - r_t^2) + r_t'^2}{2\pi r_0''(1 - r_t^2)^{3/2}},$$

$$I(b, h) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - b^2}} \int_h^\infty dx \int_{-h}^\infty dy\, (x - h)(y + h) \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2 - 2bxy}{2(1 - b^2)}\right\},$$

$$b = \frac{r_t''(1 - r_t^2) + r_t r_t'^2}{-r_0''(1 - r_t^2) - r_t'^2} \quad (|b| < 1 \text{ при } t > 0),$$

$$h = \frac{a r_t'}{1 + r_t} \sqrt{\frac{1 - r_t^2}{-r_0''(1 - r_t^2) - r_t'^2}}.$$

Докажем ограниченность функций $A(t)$ и $I(b, h)$. Используя существование производной $r_0^{(4)}$, легко получим, что при $t \to 0$

$$A(t) \sim \text{const}\, t.$$

Вследствие регулярности ξ_t при $t \to \infty$ $\lim r_t = \lim r_t' = \lim r_t'' = 0$, поэтому $\lim A(t) = 1/2\pi$. Из непрерывности функции $A(t)$ следует ее ограниченность.

Сделаем замену переменных в выражении $I(b, h)$: $x = u + v$, $y = u - v$. Получим

$$I(b, h) = \iint_{u^2 > (v+h)^2} [u^2 - (v + h)^2] \frac{e^{-\frac{u^2}{1+b}}}{\sqrt{2\pi(1 + b)}} \cdot \frac{e^{-\frac{v^2}{1-b}}}{\sqrt{2\pi(1 - b)}} du\, dv \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_0^\infty u^2 \frac{e^{-\frac{u^2}{1+b}}}{\sqrt{\pi(1+b)}}\,du = \frac{1+b}{4} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Теперь теорема 3.1 следует из леммы 3.1 и следующей леммы.

Лемма 3.4. *Пусть ξ_t — регулярный гауссовский процесс с непрерывным временем t и пусть $r_0^{(4)}$ существует. Тогда при $a\to\infty$ для любого $\varepsilon>0$ $\psi_a(\lambda_a^\varepsilon)\to 0$* (см. (1.39)).

Доказательство. Из леммы 3.2 и 3.3 следует, что

$$\psi_a(\lambda_a^\varepsilon) = \frac{\mathbf{M}\eta_a^2(0,\lambda_a^{\varepsilon-1})}{\mathbf{M}\eta_a(0,\lambda_a^{\varepsilon-1})} - 1 \leqslant \lambda_a^{-\varepsilon}\int_0^{\lambda_a^{\varepsilon-1}} ds \int_a^{\lambda_a^{\varepsilon-1}} p(a,t-s)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\lambda_a^{-1}\int_0^{\lambda_a^{\varepsilon-1}} p(a,t)\,dt \leqslant 2C\lambda_a^{-1}\int_0^{\lambda_a^{\varepsilon-1}} \exp\left(-\frac{a^2}{1+r_t}\right)dt.$$

Так как процесс ξ_t регулярен, то найдется такое T, что $\max\limits_{t>T} r_t < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда получим

$$\psi_a(\lambda_a^\varepsilon) \leqslant 2C\lambda_a^{-1}\int_0^T \exp\left(-\frac{a^2}{1+r_t}\right)dt + 2C\lambda_a^{-\varepsilon-2}\exp\left(-\frac{a^2}{1+\frac{\varepsilon}{2}}\right) =$$

$$= C_1\int_0^t \exp\left(-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1-r_t}{1+r_t}\right)dt + C_2\exp\left\{-a^2\left(\frac{\varepsilon-2}{2}+\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2}}\right)\right\},$$

где C_1 и C_2—постоянные. Так как процесс регулярен, то $(1-r_t)/(1+r_t)>0$ при всех $t>0$, и первый член стремится к нулю при $a\to\infty$. Второй член также стремится к нулю.

Используя теорему 3.1, можно установить следующие предельные соотношения для доли времени, проводимой гауссовским процессом ξ_t выше некоторого высокого уровня. Пусть $H_a(s,t)$ — сумма длин тех интервалов времени на отрезке $[s,t]$, когда $\{\xi_t>a\}$, и

$$\zeta_a(0,t) = H_a(0,t\lambda_a^{-1})\frac{r_0}{a}\sqrt{\frac{2\pi}{r_0''}},$$

где λ_a — математическое ожидание числа $\eta_a(0,1)$ пересечений уровня a снизу вверх за единицу времени (см. (3.1)).

Теорема 3.3. *Пусть ξ_t — гауссовский процесс с непрерывным временем, причем $r_0^{(4)}$ существует, и при некотором $\delta>0$*

$$\alpha(t) = O(t^{-\delta}) \quad (t\to\infty).$$

Тогда при $a\to\infty$

$$\mathbf{P}\{\zeta_a(0,t)<x\} \to V(x),$$

где $V(x)$ — распределение вероятностей с характеристической функцией

$$f(\lambda) = \exp\left\{t\left[e^{-\frac{\lambda^2}{\pi}}(1+i\lambda) - 1\right]\right\}.$$

$F(x)$ есть распределение вероятностей для суммы случайного числа случайных величин

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\eta} \tau_k', \tag{3.10}$$

величины τ_k взаимно независимы, положительны и имеют одинаковую функцию распределения $F(x) = 1 - \exp(-x^2\pi/4)$ $(x > 0)$, а η не зависит от величин $\{\tau_k\}$ и распределена по закону Пуассона со средним t. Этот результат легко вытекает из следующей леммы 3.5.

Из [11] следует, что существует условное распределение вероятностей $F_a(t)$ длины выброса при условии, что начало выброса совпадает с нулевым моментом времени (выбросом называется время между пересечением уровня a снизу вверх и следующим за ним пересечением сверху вниз):

$$F_a(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{w(\Delta)} \mathbf{P}\{\eta_a(-\Delta, 0) \geqslant 1, \quad \bar{\eta}_a(0, t) \geqslant 1\},$$

где $\bar{\eta}_a(s, t)$ — число пересечений уровня a сверху вниз на интервале (s, t), и $w(\Delta) = \mathbf{P}\{\eta_a(0, \Delta) \geqslant 1\}$.

Если $\lambda_a = \mathbf{M}\eta_a(0, 1) < \infty$, то (см. [15])

$$\int_0^\infty x dF_a(x) = \frac{1}{\lambda_a} p\{\xi_0 > a\}.$$

Эта величина называется средней длительностью выброса. Мы будем обозначать ее через $\bar{\tau}_a$. Если ξ_t — гауссовский процесс и $r_0^{(4)}$ существует, то

$$\bar{\tau}_a = \sqrt{\frac{2\pi}{-r_0''}}\, e^{\frac{a^2}{2r_0}} \int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2r_0}} dx,$$

и при $a \to \infty$

$$\bar{\tau}_a \sim \frac{r_0}{a}\sqrt{\frac{2\pi}{-r_0''}}.$$

Лемма 3.5. *Пусть ξ_t — гауссовский процесс и $r_0^{(4)}$ существует. Тогда*

$$\lim_{a\to\infty} F_a(t\bar{\tau}_a) = \lim_{a\to\infty} F_a\left(\frac{tr_0}{a}\sqrt{\frac{2\pi}{-r_0''}}\right) = 1 - e^{-\frac{t^2\pi}{4}} \quad (t \geqslant 0).$$

Это утверждение имеется в работе Райса [15]. Однако приведенное там доказательство, верное по существу, не проводится достаточно строго с точки зрения математика. Ниже мы дадим строгое доказательство, используя выкладки Райса.

Наметим вывод теоремы 3.3 из леммы 6.3. Это доказательство может быть сделано вполне строгим.

Пусть τ_{ak} — длина k-го выброса на отрезке времени $[0, t\lambda_a^{-1}]$ и $\eta = \eta_a(0, t\lambda_a^{-1})$. Тогда при $a \gg \sqrt{r_0}$, с большой вероятностью,

$$\zeta_a(0, t) = \sum_{k=1}^{\eta} \frac{\tau_{ak}}{\bar{\tau}_a}.$$

При этом, так как начала выбросов расположены очень редко, число выбросов η и моменты их начала фиксированы, то согласно сильному перемешиванию процесса условное совместное распределение нормированных длин выбросов $\tau_{ak}/\bar{\tau}_a$ $(k = 1, \ldots, \eta)$ близко к распределению η независимых одинаково распределенных величин $\tau_1, \ldots, \tau_\eta$ с функцией распределения $F(t)$. По той же причине расстояния между началами последовательных выбросов, а следовательно, и число выбросов η на отрезке $[0, t\lambda_a^{-1}]$ почти не зависят от длин выбросов. Отсюда вытекает, что предельное распределение величины $\zeta_a(0, t)$ совпадает с распределением $V(x)$ величины ζ (см. (3.10)).

Доказательство леммы 3.5. Обозначим

$$\bar{p}(a, t) = \int_0^\infty x\,dx \int_{-\infty}^{0} y\,p_{\xi_0, \xi_t, \dot{\xi}_0, \dot{\xi}_t}(a, a, x, y)\,dy.$$

Как и при доказательстве леммы 2.3, можно легко убедиться, что при $y \geqslant x > 0$

$$\mathbf{M}\eta_a(-\Delta, 0)\,\bar{\eta}_a(x, y) \leqslant \int_{-\Delta}^{0} ds \int_x^y \bar{p}(a, t - s)\,dt.$$

В [15], п. V дается выражение функции $\bar{p}(a, t)$ через корреляционную функцию r_t, из которого видно, что $\bar{p}(a, t)$ ограничена и непрерывна при фиксированном a. Кроме того, из ординарности потока пересечений $\eta_a(0, t)$ следует, что при $\Delta \to 0$ $w(\Delta) \sim \lambda_a \Delta$, поэтому существует предел

$$R_a(x, y) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{w(\Delta)} \mathbf{M}\eta_a(-\Delta, 0)\,\bar{\eta}(x, y) = \frac{1}{\lambda_a} \int_x^y \bar{p}(a, t)\,dt.$$

Так как

$$\mathbf{P}\{\eta_a(-\Delta, 0) \geqslant 1, \quad \bar{\eta}_a(x, y) \geqslant 1\} \leqslant \mathbf{M}\eta_a(-\Delta, 0)\,\bar{\eta}_a(x, y),$$

то

$$F_a(y) - F_a(x) \leqslant \frac{1}{\lambda_a} \int_x^y \bar{p}(a, t)\,dt,$$

и

$$F_a(y\bar{\tau}_a) - F_a(x\bar{\tau}_a) \leqslant \int_x^y f_1(a, t)\,dt,$$

где

$$f_1(a, t) = \frac{\bar{\tau}_a}{\lambda_a} \bar{p}(a, t\bar{\tau}_a).$$

В [15] доказано, что при $a \to \infty$ равномерно по $t \geqslant 0$

$$f_1(a, t) \to \frac{\pi}{2} t e^{-\frac{\pi}{4} t^2},$$

поэтому при $y > x$

$$\overline{\lim_{a\to\infty}}\,[F_a(y\bar{\tau}_a) - F_a(x\bar{\tau}_a)] \leqslant e^{-\frac{x^2\pi}{4}} - e^{-\frac{y^2\pi}{4}}.$$

Пусть теперь при некоторых x, $\varepsilon > 0$ и $a_n \to \infty$

$$F_{a_n}(x\bar{\tau}_{a_n}) < 1 - e^{-\frac{x^2\pi}{4}} - \varepsilon$$

для всех n. Тогда для любых y

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,F_{a_n}(y\bar{\tau}_{a_n}) < \left(1 - e^{-\frac{x^2\pi}{4}} - \varepsilon\right) + \left(e^{-\frac{x^2\pi}{4}} - e^{-\frac{y^2\pi}{4}}\right) < 1 - \varepsilon.$$

Это противоречит тому, что

$$\int_0^\infty x\,dF_a(x\bar{\tau}_a) = 1 \text{ и } F_a(y\tau_a) \geqslant 1 - \frac{1}{y}$$

для любых a и y. Следовательно,

$$\lim_{a\to\infty} F(x\bar{\tau}_a) = 1 - e^{-\frac{x^2\pi}{4}}.$$

§ 4. Критерии полной регулярности стационарных процессов

1. Сначала докажем равенство

$$\beta(\tau) = \sup_t \operatorname*{Var}_{C\in\mathfrak{M}_\infty^t\times\mathfrak{M}_{t+\tau}^\infty} [\mathbf{P}(C) - \mathbf{P}^{(t,\tau)}(C)].$$

Оно легко вытекает из следующей леммы. Пусть в произведении пространств $(X, \mathfrak{X}) \times (Y, \mathcal{Y})$ задана сепарабельная вероятностная мера $\mathbf{P}_{(\xi,\eta)}$, где через ξ и η обозначены случайные величины со значениями соответственно в X и Y. Обозначим через $\mathbf{P}_\xi$ и $\mathbf{P}_\eta$ распределение величин ξ и η и через $\mathbf{P}_{\xi/\eta}$ условное распределение ξ при условии, что η фиксировано.

Лемма 1.4.

$$\operatorname{Var}(\mathbf{P}_{(\xi,\eta)} - \mathbf{P}_\xi \times \mathbf{P}_\eta) = \mathbf{M}\operatorname{Var}(\mathbf{P}_\xi - \mathbf{P}_{\xi/\eta}).$$

Доказательство. Так как $\mu = \mathbf{P}_{(\xi,\eta)} - \mathbf{P}_\xi \times \mathbf{P}_\eta$ есть функция множества ограниченной вариации, то существует C^* такое, что

$$\mu(C^*) = \sup_{C\in\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}} \mu(C) = \frac{1}{2}\operatorname{Var}\mu.$$

Пусть C_y — сечение множества C, соответствующее элементу y. Тогда

$$\mu(C^*) = \mathbf{M}\,[\mathbf{P}_{\xi/\eta}(C_\eta^*) - \mathbf{P}_\xi(C_\eta^*)] \leqslant \mathbf{M}\sup_{A\in\mathfrak{X}} [\mathbf{P}_{\xi/\eta}(A) - \mathbf{P}_\xi(A)] =$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{M}\operatorname{Var}(\mathbf{P}_\xi - \mathbf{P}_{\xi/\eta}).$$

Обратно, в силу сепарабельности можно выбрать счетную последовательность множеств $A_j \in \mathfrak{X}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ такую, что для любых $\varepsilon > 0$ и $y \in Y$ найдется $j(y)$ такое, что

$$\mathbf{P}_{\xi/\eta}(A_j) - \mathbf{P}_\xi(A_j) > \sup_{A\in\mathfrak{X}} [\mathbf{P}_{\xi/\eta}(A) - \mathbf{P}_\xi(A)] - \varepsilon.$$

Если теперь положить $k(y) = \min j(y)$ и

$$C = \{(x, y) : x \in A_{k(y)}\},$$

то $C \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, и

$$\mu(C) > \mathbf{M} \sup_{A \in \mathfrak{X}} [\mathbf{P}_{\xi/\eta}(A) - \mathbf{P}_{\xi}(A)] - \varepsilon = \frac{1}{2} \mathbf{M} \operatorname{Var}(\mathbf{P}_{\xi} - \mathbf{P}_{\xi/\eta}) - \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\mu(C^*) \geqslant \frac{1}{2} \mathbf{M} \operatorname{Var}(\mathbf{P}_{\xi} - \mathbf{P}_{\xi/\eta}).$$

В дальнейшем без особых оговорок мы будем рассматривать только стационарные в узком смысле процессы.

2. Пусть μ — любая вполне аддитивная функция на множествах σ-алгебры $\mathfrak{M}_{-\infty}^{\infty}$ процесса ξ_t. Через μ_t $(t \geqslant 0)$ мы будем обозначать функцию μ, определенную не на всей σ-алгебре $\mathfrak{M}_{-\infty}^{\infty}$, а только на σ-алгебре $M_t = \mathfrak{M}_{-\infty}^{t} \times \mathfrak{M}_{0}^{\infty}$.

Далее, обозначим меру $\mathbf{P}^{(0,0)}$ (см. введение) через $\overline{\mathbf{P}}$, через $\mathbf{P}_t'$ и $\mathbf{P}_t''$ — сингулярную и абсолютно непрерывную компоненты меры $\mathbf{P}_t$ относительно меры $\overline{\mathbf{P}}_t$, и через $\overline{\mathbf{P}}_t'$ и $\overline{\mathbf{P}}_t''$ — сингулярную и абсолютно непрерывную компоненты $\overline{\mathbf{P}}_t$ относительно $\mathbf{P}_t$. Кроме того, обозначим плотности:

$$p_t(\omega) = \frac{d\mathbf{P}_t}{d\overline{\mathbf{P}}_t} \quad \text{и} \quad \overline{p}_t(\omega) = \frac{d\overline{\mathbf{P}}_t}{d\mathbf{P}_t}.$$

Теперь величина $\beta(t)$ для стационарного в узком смысле процесса может быть записана так $(t \geqslant 0)$:

$$\beta(t) = \operatorname{Var}(\mathbf{P} - \overline{\mathbf{P}})_{-t} = \overline{\mathbf{P}}_{-t}'(\Omega) + \mathbf{M}\,|1 - \overline{\mathbf{P}}_{-t}| = \mathbf{P}_{-t}'(\Omega) + \mathbf{M}\,|1 - p_{-t}|. \quad (4.1)$$

Теорема 4.1. *Для полной регулярности стационарного процесса ξ_t необходимо и достаточно, чтобы он был регулярен и чтобы выполнялось одно из соотношений*:

$$\text{а)} \lim_{t \to -\infty} \mathbf{P}_t'(\Omega) = 0 \quad \textit{или} \quad \text{б)} \lim_{t \to -\infty} \overline{\mathbf{P}}_t'(\Omega) = 0. \quad (4.2)$$

Предварительно докажем следующие леммы:

Лемма 4.2. *Каждое из соотношений*

$$p_t \to 1 \text{ по мере } \overline{\mathbf{P}} \text{ при } t \to -\infty, \quad (4.3)$$

$$\overline{p}_t \to 1 \text{ по мере } \mathbf{P} \text{ при } t \to -\infty \quad (4.4)$$

необходимо и достаточно для полной регулярности процесса ξ_t.

Доказательство. Докажем утверждение леммы для соотношения (4.4) (для соотношения (4.3) доказательство вполне аналогично). Необходимость вытекает из равенства (4.1). Обозначим

$$\delta(t, \varepsilon) = \mathbf{P}\{|\overline{p}_{-t} - 1| \geqslant \varepsilon\}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\mathbf{M}\,|\overline{p}_{-t} - 1| = \int_{\{|\overline{p}_{-t} - 1| \geqslant \varepsilon\}} (\overline{p}_{-t} + 1)\,\mathbf{P}(d\omega) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \delta(t, \varepsilon) + 1 - \int\limits_{\{|\overline{p}_t^{-1}-1|<\varepsilon\}} \overline{p}_{-1}\mathbf{P}(d\omega) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + 2\delta(t, \varepsilon) + \int\limits_{\{|\overline{p}_t^{-1}-1|<\varepsilon\}} |\overline{p}_t - 1|\,\mathbf{P}(d\omega) \leqslant 2[\varepsilon + \delta(t, \varepsilon)]. \qquad (4.5)$$

Кроме того, из (4.4) следует, что $\overline{\mathbf{P}}'_{-t}(\Omega) \to 0$ при $t \to +\infty$. Поэтому согласно равенству (4.1) из соотношения (4.4) следует, что $\beta(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Лемма 4.3. *Пусть* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ *и* $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ *— два пространства с мерами, и* $V = (X \times Y, \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$ *— прямое произведение этих пространств. И пусть* $\mathfrak{A}_1 \supseteq \mathfrak{A}_2 \supseteq \ldots$ *— монотонная последовательность подалгебр алгебры* $\mathfrak{A}$ *такая, что* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$ *содержит только множества* μ*-меры* 0 *или* 1. *Тогда для любого множества* E *из* σ*-алгебры* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{A}_n \times \mathfrak{B})$ *в пространстве* V *существует множество вида* $X \times E'$ $(E' \in \mathfrak{B})$, *отличающееся от* E *только на множество* $\mu \times \nu$*-меры* 0.

Доказательство. Для любого n множество E $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$-измеримо, и, следовательно, сечение E_y $(y \in Y)$ $\mathfrak{A}_n$-измеримо (см. [16]). Поэтому $\mu(E_y) = 0$ или 1, и множество $X \times \{y : \mu(E_y) = 1\}$ отличается от E на множество меры 0.

Доказательство теоремы 4.1. Необходимость условий (4.2) вытекает непосредственно из равенства (4.1). Регулярность также необходима для полной регулярности, как это отмечалось уже во введении. Докажем достаточность условия (4.2а). Заметим, что процесс $(p_t, M_t, \overline{\mathbf{P}}, -\infty < t < 0)$ является полумартингалом, и поэтому $\lim p_t(\omega)$ существует $\overline{\mathbf{P}}$-почти наверное, и $\overline{\mathbf{P}}$-почти наверное

$$\lim_{t \to -\infty} p_t \geqslant \overline{\mathbf{M}}(p_t \mid \bigcap_{s<0} M_s) \qquad (4.6)$$

(см. [4], стр. 569 и 296). Из условия (4.2а) следует, что на $\bigcap\limits_{s<0} M_s$ мера $\mathbf{P}$ абсолютно-непрерывна относительно $\overline{\mathbf{P}}$. Из леммы 4.3 легко вытекает, что плотность меры $\mathbf{P}$ относительно $\overline{\mathbf{P}}$ на алгебре $\bigcap\limits_{s<0} M_s$ почти наверное совпадает с такой же плотностью на алгебре $\mathfrak{M}_0^{\infty}$, т. е. с 1. $\overline{\mathbf{M}}(p_t \mid \bigcap\limits_{s<0} M_s)$ есть плотность меры $\mathbf{P}''_t$ относительно $\overline{\mathbf{P}}$ на $\bigcap\limits_{s<0} M_s$. Согласно сказанному выше это есть также плотность $\mathbf{P}''_t$ относительно $\mathbf{P}$. Согласно (4.2а) $d\mathbf{P}''_t/d\mathbf{P} \to 1$ по мере $\mathbf{P}$. Следовательно, $\overline{\mathbf{P}}$-почти наверное при $s \to -\infty$ $\lim p_s \geqslant 1$. По лемме Фату

$$\overline{\mathbf{M}} \lim_{s \to -\infty} p_s \leqslant \varlimsup_{s \to -\infty} \overline{\mathbf{M}} p_s = \varlimsup_{s \to -\infty} \mathbf{P}''_s(\Omega) = 1,$$

поэтому при $s \to -\infty$ $\lim p_s = 1$.

Следствие 1. *Если процесс* ξ_t *регулярен и для некоторого* $t < 0$ *одна из мер,* P_t *и* $\overline{P}_t$, *абсолютно-непрерывна относительно другой, то* ξ_t *вполне регулярен. При этом для любого* $\varepsilon > 0$ $\beta(t) \leqslant 2[\varepsilon + \delta(t, \varepsilon)]$, *где* $\delta(t, \varepsilon) =$

$= \overline{P}\{|p_t - 1| \geqslant \varepsilon\}$ (*если* P_t *абсолютно-непрерывна относительно* $\overline{P}_t$) *или* $\delta(t, \varepsilon) = P\{|\overline{p}_t - 1| \geqslant \xi\}$ (*если* $\overline{P}_t$ *абсолютно-непрерывная относительно* P_t) (см. 4.5)).

Следствие 2. *Если процесс* ξ_t *регулярен, и информация будущего относительно прошлого*

$$I(\tau) = I(\mathfrak{M}_{-\infty}^{t}, \mathfrak{M}_{t+\tau}^{\infty}) < \infty$$

при некотором τ, *то процесс* ξ_t *вполне регулярен.*

Это вытекает из следствия 1, так как из конечности информации $I(t)$ следует абсолютная непрерывность меры P_t относительно $\overline{P}_t$ (см. [6]).

3. Оценим теперь скорость убывания величины информации $I(t)$ при $t \to \infty$ (а следовательно, и величины $\beta(t)$) для гауссовской стационарной последовательности.

Теорема 4.2. *Пусть гауссовская стационарная последовательность* $\{\xi_k\}$ *имеет непрерывную положительную спектральную плотность* $f(\lambda)$, *и пусть*

$$m(T) = \frac{1}{\min f(\lambda)} \sum_{t>T} \sum_{k>t} |r_k| < \infty,$$

где r_t *— корреляционная функция. Тогда*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{I(t)}{m^2(t)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Следствия. 1. *В силу соотношения*

$$\overline{\lim_{I\to 0}} \frac{\beta^2(\tau)}{I(\tau)} \leqslant 2,$$

имеет место оценка для функции $\beta(t)$:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\beta(t)}{m(t)} \leqslant 1.$$

2. *Если спектральная плотность* $f(\lambda)$ *стационарной последовательности положительна,* $r_k = O(k^{-\gamma})$ *при* $k \to \infty$ *и* $\gamma > 2$, *то* $I(t) = O(t^{2(2-\gamma)})$ *и* $\beta_t = O(t^{2-\gamma})$.

3. *Пусть спектральная плотность* $f(\lambda)$ *имеет* k*-ю производную с ограниченным изменением, и пусть* $V_k = \operatorname{Var} f^{k}(\lambda)$. *Тогда из равенства*

$$r_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \lambda t f(\lambda)\, d\lambda$$

вытекает, что (см. [18])

$$|r_t| \leqslant \frac{V_k}{2\pi t^{k+1}}.$$

Поэтому для $k \geqslant 2$

$$I(t) = O(t^{2-2k}) \text{ и } \beta(t) = O(t^{1-k})^{*}.$$

---

* Другими методами можно доказать, что для полной регулярности последовательности достаточно, чтобы спектральная плотность $f(\lambda)$ была абсолютно непрерывна, не обращалась в нуль, и

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'^2(\lambda)\, d\lambda < \infty.$$

Сначала докажем следующую лемму:

Лемма 4.2. *Пусть* $\| q_{ij} \| = \| r_{t-j} \|_{i,j=1,\dots,n}^{-1}$. *Тогда*

$$\max_{i,j} | q_{ij} | \leqslant \frac{1}{\inf f(\lambda)}.$$

Доказательство. Пусть λ_k — собственные значения матрицы $\| r_{t-j} \|$. Так как $\| q_{ij} \|$ — положительно определенная симметрическая матрица, то

$$\| q_{ij} \|^2 \leqslant q_{ii} q_{jj} \leqslant (\max_j q_{jj})^2.$$

Как известно, существует ортогональная матрица $C = \| c_{ij} \|$ такая, что

$$\| q_{ij} \| = C \Lambda C^*, \text{ где } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix},$$

поэтому

$$q_{jj} = \sum_k c_{jk} \lambda_k^{-1} c_{kj}^* = \sum_k \lambda_k^{-1} c_{jk}^2 \leqslant \max_k \lambda_k^{-1}.$$

Далее,

$$\min_k \lambda_k = \min_y \frac{\sum_{i,j} r_{i-j} y_i y_j}{\sum_k y_k^2} = \min_y \int_{-\pi}^{\pi} \frac{| \sum y_k e^{ikx} |^2}{2\pi \sum y_k^2} f(x)\, dx \geqslant \inf f(\lambda).$$

Из этих неравенств вытекает утверждение леммы.

Доказательство теоремы 4.2. Пусть

$$I_n(t) = I[(\xi_{-1}, \dots, \xi_{-n}); (\xi_{t+1}, \dots, \xi_{t+n})]$$

— информация вектора $(\xi_{-1}, \dots, \xi_{-n})$ относительно вектора $(\xi_{t+1}, \dots, \xi_{t+n})$. Легко показать, что $I(t) \leqslant \lim_{n \to \infty} I_n(t)$.

Обозначим, далее,

$$R = \| R_{ij} \|, \; R_{ij} = r_{t+i+j}, \; Q = \| q_{ij} \| = \| r_{i-j} \|^{-1}, \; i,j = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$I_n(T) = -\frac{1}{2} \log \det (E - A),$$

где $A = RQRQ$ (см. [17], равенство (2.15)).

Докажем, что

$$\operatorname{Sp} A^2 \to 0 \tag{4.7}$$

при $T \to \infty$ равномерно по n. Действительно,

$$\operatorname{Sp} A^2 = \operatorname{Sp} RQRQQ'R'Q'R' = \sum R_{ij} q_{jk} R_{kl} q_{lm} q_{mp} R_{ps} q_{st} R_{ti},$$

где суммирование идет по всем индексам в пределах от 1 до n. Применяя

лемму 4.2, получаем:

$$\operatorname{Sp} A^2 \leqslant \left[\frac{1}{\min f(\lambda)}\right]^4 \left(\sum_{t>T}\sum_{k>t} |r_k|\right)^4 = m^4(T) \to 0.$$

Из соотношения (4.7) вытекает, что максимальное по абсолютной величине собственное значение матрицы A стремится к нулю при $T \to \infty$ равномерно по n.

Пусть λ_j — собственные числа матрицы A. Тогда при достаточно больших T равномерно по n

$$I_n(T) = -\frac{1}{2}\sum \log(1-\lambda_j) \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum \lambda_j + \sum \lambda_j^2\right) \leqslant \frac{1}{2}(|\operatorname{Sp} A| + \operatorname{Sp} A^2).$$

С другой стороны,

$$|\operatorname{Sp} A| = \left|\sum R_{ij}q_{jk}R_{kl}q_{li}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{1}{\min f(\lambda)}\right]^2 \left(\sum_{t>T}\sum_{k>t} |r_k|\right)^2 = m^2(T).$$

Из этих неравенств вытекает утверждение теоремы.

Поступила в редакцию
3.6.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Rosenblatt, A central limit theorem and a strong mixing condition, Proc. Nat. Acad. Sci. Wash., **42**, 1 (1956), 43—46.
[2] В. Г. Винокуров Условия регулярности вероятностных процессов, ДАН СССР, **113**, 5 (1957), 959—961.
[3] В. Г. Винокуров, Элементы общей теории стационарных вероятностных процессов, Диссертация, МГУ, 1953.
[4] Д. Л. Дуб, Вероятностные процессы, М., ИЛ, 1956.
[5] D. Doob, The elementary Gaussian processes, Ann. Math. Stat, **15**, 3 (1944), 229—282.
[6] И. М. Гельфанд, А. Н. Колмогоров, А. М. Яглом, К общему определению количества информации, ДАН СССР, **111**, 4(1956), 745.
[7] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М.— Л., ГИТЛ, 1949.
[8] С. Н. Бернштейн, Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин, УМН, **10** (1944), 65—115.
[9] P. H. Diananda, The central limit theorem for m-dependent variables asymptotically stationary to second order Proc. Combr. Phil. Soc., **50**, 2 (1954), 287.
[10] А. Я. Хинчин, Асимптотические законы теории вероятностей, М.— Л., ОНТИ НКТП СССР, 1936.
[11] А. Я. Хинчин, Математические методы теории массового обслуживания, Труды Матем. ин-та АН СССР им. Стеклова, **49**, 1955.
[12] С. Райс, Теория флюктуационных шумов, Сборник «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», М., ИЛ, 1953, 88—238.
[13] В. И. Бунимович, Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, М., Советское Радио, 1951.
[14] В. Иванов, О среднем числе пересечений некоторого уровня выборочными функциями вероятностного процесса, Теория вероят. и ее примен., **V**, 3 (1960), 352—357.

15] S. Rise, Distribution of the Duration of Fades in Radio Transmission, Bell Syst. Tech. Journ., **87**, 3 (1958), 3—51.
16] Халмош, Теория меры, М., ИЛ, 1953.
17] И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, О вычислении количества информации о случайной функции, содержащегося в другой такой функции, Успехи матем. наук, **XII**, 1 (1957), 3—52.
18] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М.— Л., ГОНТИ, 1939.

SOME LIMIT THEOREMS FOR RANDOM FUNCTIONS. II

V. A. VOLKONSKY, Yu. A. ROZANOV *(MOSCOW)*

(Summary)

This paper is a continuation of the one published in v. IV, No. 2, 1959. A theorem is proved in § 3 on the convergence of the distribution of the number of intersections of a high level to a Poisson distribution for stationary Gaussian processes, which satisfy the «strong mixing condition». Some conditions under which stationary processes possess strong mixing are given in § 4.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том VI И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 2*
1961

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ДОСТАТОЧНЫХ СТАТИСТИКАХ СТАЦИОНАРНЫХ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

М. АРАТО

Настоящая заметка посвящается отысканию достаточных статистик стационарных гауссовских случайных процессов с дискретным временем в самом простом случае, когда спектральная плотность является рациональной функцией относительно $e^{i\lambda}$. В случае, когда стационарный гауссовский процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плотность вида

$$f_\xi(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi\,|\,1+\alpha_1 e^{-i\lambda}+\ldots+\alpha_p e^{-i\lambda p}\,|^2}, \tag{1}$$

то он удовлетворяет разностному уравнению

$$\xi(t)+\alpha_1\xi(t-1)+\ldots+\alpha_p\xi(t-p)=\varepsilon(t), \tag{2}$$

где $\sigma_\varepsilon^2 = \mathrm{M}\varepsilon^2(t)$, (Дуб [1], стр. 450), $\varepsilon(t)$ — независимые друг от друга случайные величины, а математическое ожидание $\mathrm{M}\xi(t)=0$. Оказывается, что число функций от выборочных значений $x_1, \ldots, x_N$, образующих необходимую и достаточную статистику для семейства распределений с неизвестными параметрами $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ и $\sigma_\xi^2 = \mathrm{M}\xi^2(t)$, равно $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$. Мы покажем также на простом примере, что в общем случае это не так.

По известной теореме Е. Б. Дынкина [2] выражение

$$\log p_{\xi(1),\ldots,\xi(N)}(x_1,\ldots,x_N;\,\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\,\sigma_\xi^2) -$$
$$-\log p_{\xi(1),\ldots,\xi(N)}(x_1,\ldots,x_N;\,\alpha_1^0,\ldots,\alpha_p^0,\,\sigma_\xi^{2^0})$$

является необходимой и достаточной статистикой для семейства распределений $p_{\xi(1),\ldots,\xi(N)}(y_1,\ldots,y_N;\,\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\,\sigma_\xi^2)$, где $p_{\xi(1),\ldots,\xi(N)}(y_1,\ldots,y_N;\,\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\,\sigma_\xi^2)$ — совместная плотность вероятности величин $\xi(1),\ldots,\xi(N)$; $x_1,\ldots,x_N$ — выборка и $\alpha_1^0,\ldots,\alpha_p^0,\,\sigma_\xi^{2^0}$ — фиксированные значения параметров. Из этой теоремы легко вытекает следующая

Теорема. *Если гауссовский стационарный процесс $\xi(t)$ имеет спектральную плотность вида* (1), *то система*

$$\left(\sum_{i=p+1}^{N-p} x_i^2,\ \sum_{i=p+1}^{N-p+1} x_i x_{i-1},\ \ldots,\ \sum_{i=p+1}^{N} x_i x_{i-p},\ x_1^2+x_N^2,\ x_1x_2+x_Nx_{N-1},\ \ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\ x_1x_p+x_Nx_{N-p+1},\ x_2^2+x_{N-1}^2,\ \ldots,\ x_2x_p+x_{N-1}x_{N-p+1},\ \ldots,\ x_p^2+x_{N-p+1}^2\right)$$

функций от выборки $x_1,\ldots,x_N$ образует необходимую и достаточную статистику.

Для доказательства подсчитаем совместную плотность вероятности этих величин. Умножая уравнение (2) на $\xi(t-1),\ldots,\xi(t-p)$ и взяв математическое ожидание, получаем следующую систему линейных уравнений для определения коэффи-

циента корреляции

$$\lambda_i = \frac{\mathbf{M}\xi(t)\,\xi(t-i)}{\sigma_\xi^2} \quad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 + \alpha_2\lambda_1 + \ldots + \alpha_p\lambda_{p-1} + \lambda_1 = 0,\\ &\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p\lambda_{p-2} + \lambda_2 = 0;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\alpha_1\lambda_{p-1} + \alpha_2\lambda_{p-2} + \ldots + \alpha_p + \lambda_p = 0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Кроме того, имеем

$$\sigma_\xi^2 + \sigma_\xi^2(\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_p\lambda_p) = \sigma_\varepsilon^2. \quad (4)$$

Обозначим через $A(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\xi^2}$, через $B(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ определитель ковариационной матрицы случайных величин $\xi(1), \ldots, \xi(p)$ и, наконец, через $\{b_{ij}^*\}_1^p$ — матрицу, обратную к ковариационной матрице. Тогда плотность вероятности будет иметь вид:

$$p_{\xi(1),\ldots,\xi(N)}(y_1, \ldots, y_N) = p_{\xi(1),\ldots,\xi(p)}(y_1, \ldots, y_p)\cdot p_{\varepsilon(p+1)}(y_{p+1} + \alpha_1 y_p + \ldots + \alpha_p y_1)\ldots$$

$$\ldots p_{\varepsilon(N)}(y_N + \alpha_1 y_{N-1} + \ldots + \alpha_p y_{N-p}) =$$

$$= (2\pi)^{-N/2}\sigma_\xi^{-N} B(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)^{-1/2} A(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)^{-\frac{N-p}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p} b_{ij}^* y_i y_j - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\sigma_\xi^2 A}\sum_{i=p+1}^{N}(y_i + \alpha_1 y_{i-1} + \ldots + \alpha_p y_{i-p})^2\right\}.$$

Заметим, что при отображении $\xi(1), \ldots, \xi(N)$ на $\xi(1), \ldots, \xi(p), \varepsilon(p+1), \ldots, \varepsilon(N)$ якобиан равен единице и логарифм плотности вероятности, с точностью до постоянной, имеет вид (принимая во внимание, что матрица ковариации, а потому и обратная ей матрица величин $\xi(1), \ldots, \xi(N)$ является симметричной по обеим диагоналям):

$$\frac{1 + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_p^2}{2\sigma_\xi^2 A}\sum_{i=p+1}^{N-p} y_i^2 + \frac{\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \ldots + \alpha_{p-1}\alpha_p}{\sigma_\xi^2 A}\sum_{i=p+1}^{N-p+1} y_i y_{i-1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha_p}{\sigma_\xi^2 A}\sum_{i=p+1}^{N} y_i y_{i-p} + (y_1^2 + y_N^2)\frac{1}{2\sigma_\xi^2 A} + (y_1 y_2 + y_N y_{N-1})\frac{\alpha_1}{\sigma_\xi^2 A} + \ldots$$

$$\ldots + (y_1 y_p + y_N y_{N-p+1})\frac{\alpha_{p-1}}{\sigma_\xi^2 A} + (y_2^2 + y_{N-1}^2)\frac{1 + \alpha_1^2}{2\sigma_\xi^2 A} +$$

$$+ (y_2 y_3 + y_{N-1} y_{N-2})\frac{\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2}{\sigma_\xi^2 A} + \ldots + (y_2 y_p + y_{N-1} y_{N-p+1})\frac{\alpha_{p-2} + \alpha_1\alpha_{p-1}}{\sigma_\xi^2 A} +$$

$$+ (y_p^2 + y_{N-p+1}^2)\frac{1 + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_{p-1}^2}{2\cdot\sigma_\xi^2\cdot A}.$$

Отсюда легко следует доказываемое утверждение. Таким же образом определяются достаточные статистики в случае, когда математическое ожидание неизвестно.

Следующий пример показывает, что в общем случае утверждение теоремы не имеет места. Рассмотрим стационарный гауссовский процесс

$$\xi(t) = a_0\varepsilon(t) + a_1\varepsilon(t-1), \quad (5)$$

где $\varepsilon(t)$ — независимые друг от друга гауссовские случайные величины. Покажем, что в этом случае не существует функций от выборки $x_1, \ldots, x_N$, число которых было бы меньше N, таких, чтобы они образовывали достаточную статистику для a_0, a_1, $\sigma_\xi^2 = \mathbf{M}\xi^2(t)$ (здесь предполагается, что $\mathbf{M}\xi(t) = 0$).

Из уравнения (5) следует, что

$$\sigma_\xi^2 = \mathrm{M}\xi^2(t) = (a_0^2 + a_1^2)\,\mathrm{M}\varepsilon^2(t),\quad \rho = \frac{\mathrm{M}\xi(t)\,\xi(t-1)}{\sigma_\xi^2} = \frac{a_0 a_1}{a_0^2 + a_1^2},$$

$$\mathrm{M}\xi(t)\,\xi(t-\tau) = 0,\ \text{если}\ |\tau| > 1.$$

Совместная плотность вероятности величин $\xi(1), \ldots, \xi(N)$ имеет вид:

$$p_{\xi(1),\ldots,\xi(N)}(y_1, \ldots, y_N) = \sigma_\xi^{-N}\cdot(2\pi)^{-N/2}\cdot|B_N|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2}\sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}^* y_i y_j\right\},$$

где $|B_N| = \det B_N$ и $B_N^{-1} = \{b_{ij}^*\}_1^N$ — обратная матрица по отношению к корреляционной матрице B_N процесса $\xi(t)$. Легко вычислить, что

$$b_{ij}^* = (-1)^{j-i}\rho^{j-i}\,|B_{i-1}|\,|B_{N-j}|\,\frac{1}{|B_N|}$$

при $i < j$ и $|B_i| = \dfrac{u_1^{i+1} - u_2^{i+1}}{u_1 - u_2}$ (обратная матрица предполагается симметричной по обеим диагоналям). Следует заметить, что $|B_N|$ удовлетворяет разностному уравнению $B_N| = |B_{N-1}| - \rho^2|B_{N-2}|$ и u_1, u_2 являются решениями уравнения

$$u^2 - u + \rho^2 = 0,\ \text{т. е.}\ u_1 = \frac{1+\sqrt{1-4\rho^2}}{2},\ u_2 = \frac{1-\sqrt{1-4\rho^2}}{2}.$$

Так как, далее, b_{iN}^* $(i = 1, \ldots, N)$ независимы как функции от ρ, то становится ясным (см., например, Дынкин [2], § 2), что не существует функций от выборки $x_1, \ldots, x_N$, число которых было бы меньше N и которые образовывали бы достаточную статистику для a_0, a_1, σ_ξ^2.

Я считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность А. Н. Колмогорову за постановку задачи и за внимание, оказанное мне при написании этой заметки.

Поступила в редакцию
21.4.60

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, М., ИЛ, 1956.
[2] Е. Б. Дынкин, Необходимые и достаточные статистики для семейства распределения вероятностей, УМН, **6**, 1 (1951), 68—90.

SUFFICIENT STATISTICS OF STATIONARY GAUSSIAN PROCESSES

M. ARATÓ (MOSCOW)

(Summary)

We prove that for a stationary Gaussian process with spectral density (1) the number of sufficient statistics is $\dfrac{(p+1)(p+2)}{2}$. A simple example shows that in the general case the number of sufficient statistics increases with the number of observations.

ОБ ОДНОЙ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ЗАДАЧЕ

В. М. ЗОЛОТАРЕВ

1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots$ — последовательность независимых, нормально распределенных с параметрами (0,1) случайных величин, и пусть

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \ldots = \lambda_{n_1}^2,$$

$$\lambda_{n_1+1}^2 = \lambda_{n_1+2}^2 = \ldots = \lambda_{n_1+n_2}^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

— некоторая последовательность положительных чисел таких, что представители отдельных серий (мы будем обозначать их σ_r^2, $r = 1, 2, \ldots$) образуют строго убывающую последовательность и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 = \sum_{r=1}^{\infty} n_r \sigma_r^2 < \infty. \tag{1}$$

Строится случайная величина $\eta = \sum_k \lambda_k^2 \xi_k^2$, существующая, очевидно, с вероятностью 1. Ставится вопрос об асимптотическом поведении (при $x \to \infty$) функции $\mathbf{P}\{\eta \geqslant x\} = 1 - F_\eta(x)$ и плотности $p_\eta(x)$. К такой схеме приводят некоторые задачи теории вероятностей и математической статистики.

2. Поскольку η — неотрицательная случайная величина, то мы можем использовать аппарат преобразований Лапласа, существующих в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant 0$. Нетрудно убедиться, что, по крайней мере, в этой полуплоскости

$$\varphi(s) = \mathbf{M} \exp(-s\eta) = \prod_k (1 + 2s\lambda_k^2)^{-1/2} = \prod_r (1 + 2s\sigma_r^2)^{-\frac{n_r}{2}}. \tag{2}$$

В силу условия (1) выписанное произведение сходится при всех комплексных s за исключением точек $s_r = -\dfrac{1}{2\sigma_r^2}$, $r = 1, 2, \ldots$.

Следовательно, функция $\varphi(s)$ может быть продолжена в левую полуплоскость (за исключением, конечно, точек s_r), причем:

а) если все кратности сомножителей в произведении (2) четны, то $\varphi(s)$ представляет собой мероморфную функцию с полюсами порядков $n_r/2$ в точках s_r;

б) если некоторые из чисел n_r нечетны, то $\varphi(s)$ является многозначной функцией с точками ветвления второго порядка в тех точках s_r, для которых числа n_r нечетны и полюсами порядка $n_r/2$ в точках s_r, для которых эти кратности четны.

Регулярные ветви выделяются в плоскости s с разрезом вдоль полупрямой $\left\{s\colon \operatorname{Im} s = 0,\ -\infty < \operatorname{Re} s \leqslant -\dfrac{1}{2\sigma_1^2}\right\}$. Мы выберем ту ветвь функции $\varphi(s)$, которая соответствует положительным значениям всех сомножителей произведения (2). Выбранную ветвь функции $\varphi(s)$ можно представить в виде $\varphi(s) = \exp \psi(s)$, где

$$\psi(s) = -\frac{1}{2} \sum_k \log(1 + 2s\lambda_k^2) = -\frac{1}{2} \sum_r n_r \log(1 + 2s\sigma_r^2), \tag{3}$$

для логарифмов выбраны главные значения.

3. Нетрудно видеть, что при наличии достаточно простых асимптотических выражений для плотности $p_\eta(x)$ асимптотическое представление $1 - F_\eta(x)$ может быть получено из первого, опираясь на правило Лопиталя.

По формуле обращения преобразований Лапласа

$$p_\eta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{sx + \psi(s)}\, ds. \tag{4}$$

Поскольку все особые точки функции $\psi(s)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} s < 0$, причем наибольшую вещественную часть имеет точка $s_1 = -\frac{1}{2\sigma_1^2}$, то в качестве постоянной c в формуле (4) мы можем взять любое вещественное число большее $-\frac{1}{2\lambda_1^2}$. Мы выберем в качестве c число

$$\alpha = -\frac{1}{2\lambda_1^2} + \frac{1}{2x}.$$

Проведем в (4) замену переменного, положив $s = \alpha + \frac{iu}{x}$, после чего (4) примет вид

$$p_\eta(x) = \frac{1}{x} e^{\alpha x} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu + \psi\left(\alpha + \frac{iu}{x}\right)} du.$$

Преобразуем функцию ψ в подынтегральном выражении следующим образом

$$\psi\left(\alpha + \frac{iu}{x}\right) = \frac{n_1}{2} \log x - \frac{n_1}{2} \log \lambda_1^2 - \frac{1}{2} \sum_{r=2}^{\infty} n_r \log\left(1 - \frac{\sigma_r^2}{\sigma_1^2}\right) -$$

$$- \frac{n_1}{2} \log(1 + 2iu) - \frac{1}{2} \sum_{r=2}^{\infty} n_r \log\left[1 + \frac{\sigma_r^2}{x}\left(1 - \frac{\sigma_r^2}{\sigma_1^2}\right)^{-1} (1 + 2iu)\right] =$$

$$= \frac{n_1}{2} \log x - \frac{n_1}{2} \log \lambda_1^2 + \log K + \Psi(u, x).$$

Теперь плотность предстанет в виде

$$p_\eta(x) = \frac{K}{|\lambda_1|^{n_1}} x^{\frac{n_1}{2} - 1} e^{\alpha x} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu + \Psi} du = \frac{K}{|\lambda_1|^{n_1}} x^{\frac{n_1}{2} - 1} e^{\alpha x} I(x).$$

Вещественные и мнимые части функции $iu + \Psi(u, x)$ равны соответственно

$$\operatorname{Re}(iu + \Psi) = -\frac{n_1}{4} \log(1 + 4u^2) - \frac{1}{4} \sum_{r=2}^{\infty} n_r \log\left\{\left[1 + \frac{\sigma_r^2}{x}\left(1 - \frac{\sigma_r^2}{\sigma_1^2}\right)^{-1}\right]^2 + \frac{4\sigma_r^2 u^2}{x^2}\left(1 - \frac{\sigma_r^2}{\sigma_1^2}\right)^{-2}\right\},$$

$$\operatorname{Im}(iu + \Psi) = u - \frac{n_1}{2} \operatorname{arc\,tg} 2u - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} n_r \operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{2\sigma_r^2 u}{\sigma_r^2 + x\left(1 - \frac{\sigma_r^2}{\sigma_1^2}\right)}\right\}.$$

Монотонное и равномерное по x стремление к нулю функции $\exp\{\operatorname{Re}(iu + \Psi)\}$ при $|u| \to \infty$ очевидно. В монотонном возрастании (с ростом $|u|$) как самой функции $|\operatorname{Im}(iu + \Psi)|$ (начиная с некоторого $|u_0|$), так и ее производной по $|u|$ легко убедиться, рассмотрев первые и вторые производные по $|u|$ приведенного выше ее явного выражения. Последнее обстоятельство обеспечивает при всех $A > 0$ равномерную ограниченность интеграла

$$\int_0^A \exp(iu + i \operatorname{Im} \Psi)\, du.$$

Применяя теперь к интегралу $I(x)$ хорошо известный достаточный признак ([1], стр. 701), мы убеждаемся в равномерной сходимости $I(x)$. Переход к пределу при $x \to \infty$ в подын-

тегральном выражении интеграла $I(x)$ дает нам

$$I_0 = \lim_{x\to\infty} I(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu}(1-2iu)^{-n_1/2}\,du.$$

Нетрудно заметить, что интеграл I_0 представляет собой значение в точке $x=1$ обратного преобразования Фурье характеристической функции $(1-2it)^{-n_1/2}$, которой соответствует плотность

$$\frac{1}{2^{n_1/2}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)}\,x^{\frac{n_1}{2}-1}\,e^{-\frac{x}{2}}.$$

Таким образом, для I_0 мы получаем в итоге выражение

$$I_0 = \left[\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\sqrt{e\cdot 2^{n_1}}\right]^{-1},$$

что в свою очередь приводит нас к следующему асимптотическому представлению плотности $p_\eta(x)$ ($\varepsilon(x)\to 0$ при $x\to\infty$):

$$p_\eta(x) = \frac{K}{(2\lambda_1^2)^{n_1/2}\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)}\,x^{\frac{n_1}{2}-1}\,e^{-\frac{x}{2\lambda_1^2}}(1+\varepsilon(x)). \tag{5}$$

Приведенное в начале этого пункта соображение позволяет без труда получить из (5) асимптотическое представление $1-F_\eta(x)$. Именно,

$$1-F_\eta(x) = \frac{K}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2\lambda_1^2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\lambda_1^2}}(1+\varepsilon(x)). \tag{6}$$

Вид обеих асимптотических формул показывает, что основную роль в них играет первая серия случайных величин (χ^2 с n_1 степенями свободы), а влияние остальных слагаемых в сумме η сводится к появлению в этих формулах постоянной K.

Замечание 1. Присутствующая в (5) и (6) постоянная

$$K = \prod_{r=2}^{\infty}\left(1-\frac{\sigma_r^2}{\sigma_1^2}\right)^{-\frac{n_r}{2}}$$

может быть выражена через значение n_1-й производной функции $\varphi^{-2}(s)$ в точке $-\frac{1}{2\lambda_1^2}$:

$$\frac{(2\lambda_1^2)^{n_1}\Gamma(n_1+1)}{K^2} = \frac{d^{n_1}}{ds^{n_1}}\left[\varphi^{-2}(s)\right]_{s=-\frac{1}{2\lambda_1^2}}.$$

Замечание 2. Если $n_1\geqslant 3$, то тем же методом, что применялся выше, можно установить асимптотическое поведение остаточного члена $\varepsilon(x)$ в (5) и (6) при $x\to\infty$:

$$\varepsilon(x)\sim -\frac{1}{x}\left(\frac{n_1}{2}-1\right)\sum_{r=2}^{\infty} n_r\sigma_r^2\left(1-\frac{\sigma_r^2}{\sigma_1^2}\right)^{-1}.$$

Вид этого выражения говорит о том, что при $n_1=2$ (и, возможно, при $n_1=1$) порядок остаточного члена будет существенно иным.

Поступила в редакцию
22.12.60

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Ф. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. ОГИЗ, Гостехиздат, М., 1948.

CONCERNING A CERTAIN PROBABILITY PROBLEM

V. M. ZOLOTAREV (*MOSCOW*)

(*Summary*)

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be a sequence of independent (0, 1) normal random variables and let

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \cdots = \lambda_{n_1}^2,$$

$$\lambda_{n_1+1}^2 = \lambda_{n_1+2}^2 = \cdots = \lambda_{n_1+n_2}^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots$$

be a sequence of positive numbers such as

$$\lambda_1^2 > \lambda_{n_1+1}^2 > \cdots \text{ and } \sum_k \lambda_k^2 < \infty.$$

We prove the following asymptotic formula for the distribution of random variable $\eta = \sum_k \lambda_k^2 \xi_k^2$:

$$\mathbf{P}\{\eta \geqslant x\} = 1 - F_\eta(x) = \frac{K}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2\lambda_1^2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\lambda_1^2}} [1 + \varepsilon_1(x)],$$

$$p_\eta(x) = \frac{K}{(2\lambda_1^2)^{n_1/2}\,\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)} x^{\frac{n_1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2\lambda_1^2}} (1 + \varepsilon_2(x)),$$

where $\varepsilon_j(x) \to 0$ as $x \to \infty$ and

$$K = \prod_{k=n_1+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_k^2}{\lambda_1^2}\right)^{-1}.$$

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЕМ

И. Н. КОВАЛЕНКО

Введение

Настоящая работа возникла из задач массового обслуживания, которыми занимались под руководством Б. В. Гнеденко в отделе теории вероятностей и математической статистики Института математики АН УССР. Здесь, в частности, изучались схемы обслуживания с различными ограничениями на время обслуживания, время ожидания или время пребывания в системе. Некоторые постановки и решения задач такого рода со-

держатся в работах [1,6]. Предметом данной статьи является изучение одного класса схем массового обслуживания, в который входят некоторые ранее изучавшиеся схемы. Дается описание каждой из этих схем при помощи интегрального уравнения с единственным решением. Различные числовые характеристики обслуживания выражаются через решения этого уравнения. В конце статьи приводятся примеры.

§ 1. Различные схемы обслуживания и описание их при помощи случайного блуждания

Рассмотрим пункт обслуживания, на который поступает простейший поток потребителей с параметром λ (см. [5]). Время, необходимое для обслуживания,— случайная величина η с функцией распределения $H(x)$; $H(+0)=0$. Каждый потребитель может покинуть систему после полного обслуживания или еще до начала обслуживания, в зависимости, во-первых, от того, когда систему покинут потребители, пришедшие до него, во-вторых, от случайной величины η, определенной выше, и, в-третьих, от ограничений, сводящихся к следующему.

1. В случае занятости системы потребитель может ожидать ее освобождения время, не превосходящее случайной величины γ_1 с функцией распределения $B(x)$.

2. Если после ожидания, продолжавшегося время γ, началось обслуживание потребителя, то он может ожидать окончания обслуживания не больше случайного времени γ_2, причем

$$\mathbf{P}\{\gamma_2 < x \mid \gamma = y\} = G_y(x); \quad G_y(+0)=0, \quad y \geqslant 0$$

(мы будем считать, что $G_y(x)$ измерима по y при каждом x). Обслуживание потребителя, поступившего в момент t, начинается немедленно (если система в этот момент свободна) или в момент s, когда систему покинут все потребители, поступившие до t (если система в момент t была ими занята и если потребитель, поступивший в момент t, сам не покинул систему раньше s). Таким образом, схема обслуживания описывается параметром λ и функциями $H(x)$, $B(x)$ и $G_y(x)$. Подчинив эти функции различным условиям, можно получить также частные схемы:

Схема 1. *Обслуживание без ограничений (чистая очередь)*:

$$B(x) \equiv 0, \; G_y(x) \equiv 0.$$

Схема 2. *Время ожидания начала обслуживания ограничено случайной величиной*. Эта схема получается, если взять в качестве $B(x)$ функцию распределения данной случайной величины и положить $G_y(x) \equiv 0$.

Схема 3. *Общее время пребывания в системе ограничено случайной величиной* τ. В качестве $B(x)$ следует взять функцию распределения случайной величины τ; тогда

$$G_y(x) = [B(x+y) - B(y)]/[1 - B(y)].$$

Схема 4 (*смешанная схема*)

$$G_y(x) = [B(y+\alpha x) - B(y)]/[1 - B(y)]$$

в частности, при $\alpha = 0$ получается схема 2, при $\alpha = 1$ — схема 3).

Введем случайный процесс $\xi(t)$, положив $\xi(t)=0$, если в момент t в системе нет потребителей, поступивших ранее, если же такие потребители имеются, то положим $\xi(t)$ равным времени с момента t до того момента, когда все они покинут систему.

При обслуживании без ограничений (схема 1) $\xi(t)$ есть время ожидания, исследованию которого посвящена статья Такача [2]. Схема 2 изучалась Броди [6]. При выводе уравнения для распределения $\xi(t)$ нами будет использован метод Такача [2].

§ 2. Существование стационарного распределения

Обозначим $F(t, x) = \mathbf{P}\{\xi(t) < x\}$. В [2] доказано существование стационарного распределения $\xi(t)$ в случае чистой очереди при условии $\lambda \mathbf{M}\eta < 1$. Для схем с ограничением практически наиболее интересен тот случай, когда максимальное время пребывания в системе ограничено.

Если для некоторого вещественного T и любого $y \geqslant 0$ имеют место равенства $B(T) = 1$ и $G_y(T - y) = 1$, то с вероятностью единица время пребывания в системе обслуживания будет ограничено T.

Теорема 1. *Если время пребывания в системе обслуживания ограничено, то при* $t \to \infty$ *существует единственное стационарное распределение* $F(x) = \lim F(t, x)$, *причем сходимость к пределу является равномерно экспоненциально быстрой.*

Доказательство. Так как $\xi(t)$ — однородный марковский процесс, то утверждение теоремы следует из условия Деблина, согласно которому должны найтись конечная мера φ на множестве состояний, а также числа $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ такие, что вероятность перехода за время T из любого состояния ξ во множество состояний A не превосходит $1 - \varepsilon$, коль скоро $\varphi(A) < \varepsilon$ (см. [3]). В нашем случае это условие вытекает из очевидного неравенства

$$\mathbf{P}\{\xi(t+T) = 0 \mid \xi(t) = x\} \geqslant e^{-\lambda T} = \varepsilon > 0$$

(если в интервале от t до $t+T$ нет поступления потребителей, то в момент $t+T$ система будет свободной).

§ 3. Уравнение для стационарного распределения

Будем считать, что процесс $\xi(t)$ обладает стационарным начальным распределением, тогда $F(t, x) = F(x)$ для всех $t \geqslant 0$. Событие $\{\xi(t+h) < x\}$ при $x > h > 0$ может осуществиться следующими четырьмя способами (если пренебречь событием с вероятностью порядка $o(h)$):

1. $\xi(t) < x + h$ и на интервале $(t, t+h)$ не было поступления потребителей;
2. $\xi(t) = y < x + h$; в момент $t + z$ $(0 < z < h)$ поступил потребитель и покинул систему до начала обслуживания, т. е. $\gamma_1 < y - z$;
3. $\xi(t) = y < x + h$; в момент $t + z$ $(0 < z < h)$ поступил потребитель и начал обслуживаться $(\gamma_1 \geqslant y - z)$, но покинул систему до конца обслуживания, т. е. $\gamma_2 < x - y + h$;
4. $\xi(t) = y < x + h$; в момент $t + z$ $(0 < z < h)$ поступил потребитель; $\gamma_1 \geqslant y - z$; $\gamma_2 \geqslant x - y + h$; обслуживание потребителя закончилось до момента $t + h + x$, т. е. $\eta < x - y + h$.

Учитывая все эти возможности, получим:

$$F(x) = (1 - \lambda h) F(x + h) + \lambda \int_0^h dz \int_0^{x+h} \{B(y - z) + [1 - B(y - z)] G_y(x - y + h) +$$

$$+ [1 - B(y - z)][1 - G_{y-z}(x - y + h)] H(x - y + h)\} dF(y) + o(h). \qquad (1)$$

Из (1) следует, что $[F(x+h) - F(x)]/h \leqslant \lambda + O(h)$. Значит, при $x > 0$ $F(x)$ абсолютно непрерывна:

$$F(x) = F(0) + \int_0^x p(t)\, dt; \quad p(x) \leqslant \lambda.$$

Далее, почти для всех $x > 0$ из уравнения (1) следует, что

$$F(x) = (1 - \lambda h) F(x + h) + \lambda h \int_0^x \{B(y) + [1 - B(y)] G_y(x - y) +$$

$$+ [1 - B(y)][1 - G_y(x - y)] H(x - y)\} dF(y) + o(h),$$

откуда

$$F'(x) - \lambda \int_0^x [1 - B(y)][1 - G_y(x - y)][1 - H(x - y)] dF(y) = 0, \qquad (2)$$

где $F'(x)$ означает пока производную справа.

В точках, где определена $p(x)$,

$$p(x) - \lambda \int_0^x [1 - B(y)]\,[1 - G_y(x-y)]\,[1 - H(x-y)]\,p(y)\,dy =$$

$$= \lambda F(0)\,[1 - G_0(x)]\,[1 - H(x)]. \tag{3}$$

Будем считать $F(0)$ фиксированной постоянной, тогда уравнение (3) как уравнение Вольтерра с ограниченным ядром будет иметь единственное решение $p(x) \in L_2(0, T)$, определенное почти всюду (см. [4]). Из (3) следует, что

$$|p(x)| \leqslant \lambda \left[\int_0^T |p(y)|\,dy + F(0) \right],$$

т. е. уравнение (3) в классе $L_1(0, T)$ также имеет единственное решение вида $p(x) = F(0)\,p_1(x)$, где $F(0)$ определяется из уравнения нормировки

$$F(0) + \int_0^T p(t)\,dt = 1, \tag{4}$$

поэтому

$$F(0) \left[1 + \int_0^T p_1(t)\,dt \right] = 1.$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. *Функция распределения $F(x)$ имеет скачок в точке $x = 0$ и абсолютно непрерывна при $x > 0$. Производная $p(x) = F'(x)$ определяется почти всюду как единственное интегрируемое решение уравнения (3) с нормировкой (4).*

§ 4. Выражение различных характеристик обслуживания через $F(x)$

Рассмотрим следующие функции и постоянные, связанные со стационарным процессом обслуживания: $F_1(x)$ — функция распределения фактического времени ожидания; $F_2(x)$ — функция распределения времени пребывания в системе; $F_3(x)$ — функция распределения отношения фактического времени обслуживания ко времени, необходимому для полного обслуживания; $F_4(x)$ — вероятность того, что потребитель будет полностью обслужен, если время, необходимое для этого, равно x; α_1 — вероятность чистой потери (потребитель совсем не будет обслуживаться); α_2 — вероятность частичной потери (потребитель будет обслуживаться, но не полностью). Эти функции (почти всюду) и постоянные определяются следующим образом:

$$F_1(x) = F(x) + [1 - F(x)]B(x),$$

$$F_2(x) = F(x) - \frac{1}{\lambda} p(x) + B(x)\,[1 - F(x)],$$

$$F_3(x) = 1 - \int_0^\infty \int_0^T [1 - G_y(xz)]\,dF(y)\,dH(z), \quad 0 < x < 1,$$

$$F_4(x) = \int_0^T [1 - G_y(x)]\,dF(y);$$

$$\alpha_1 = \int_0^T B(y)\,dF(y) \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \int_0^T [1 - B(y)] \int_0^\infty G_y(z)\,dH(z)\,dF(y);$$

F_1, F_2, α_1 и α_2 являются общеупотребительными характеристиками обслуживания, F_3 может оказаться полезной в схеме обслуживания, где имеет смысл говорить об убытке от частичного обслуживания в зависимости от степени «недообслуживания». Функция

F_4 полезна при решении такой интересной задачи. Имеется несколько пунктов обслуживания с различными $B(x)$ и $G_y(x)$ (возможно, что эти пункты неодинаково быстро обслуживают потребителей); каждому поступающему потребителю соответствует некоторое значение параметра ω, по которому можно определить, сколь быстро потребителя могут обслужить на каждом из пунктов; при этом в зависимости от ω можно направлять потребителя на тот или иной пункт. Потоки потребителей на каждый пункт будут простейшими, следовательно, можно определить вероятность отказа для потребителей с тем или иным параметром ω. В зависимости от ω отказ может принести какой-то убыток. Требуется найти наивыгоднейшее разбиение параметрического множества $\{\omega\}$ на классы, соответствующие различным пунктам обслуживания. Аналогичную постановку имеет задача об оптимальном распределении работы между станками с различными характеристиками.

§ 5. Примеры

Отметим некоторые случаи, когда решение уравнения (3) с условием (4) можно получить в квадратурах.

1. В работе [2] при помощи преобразования Лапласа определяется $F(x)$ для чистой очереди (схема 1).

2. Для схемы 2 уравнение (3) принимает вид:

$$p(x) - \lambda \int_0^x [1 - B(y)][1 - H(x-y)]\, p(y)\, dy = \lambda F(0)[1 - H(x)] \tag{5}$$

(это уравнение выведено С. М. Броди в [6] для частного случая, когда время обслуживания распределено по экспоненциальному закону, причем $B(y) = 0$ при $y \leqslant \tau$ и $B(y) = 1$ при $y > \tau$).

Предположим, что $B(x)$—ступенчатая функция, т. е. для некоторых $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

$$B(x_1 + 0) - B(x_1) = \Delta_1, \ldots, B(x_n + 0) - B(x_n) = \Delta_n;\ \Delta_1 + \ldots + \Delta_n = 1.$$

В интервале $(0, x_1)$ уравнение (5) будет иметь вид:

$$p(x) - \lambda \int_0^x [1 - H(x-y)]\, p(y)\, dy = \lambda F(0)[1 - H(x)]. \tag{6}$$

Рассмотрим уравнение (6) на $(0, \infty)$, заменив p на f:

$$f(x) - \lambda \int_0^x [1 - H(x-y)]\, f(y)\, dy = \lambda F(0)[1 - H(x)]. \tag{7}$$

Обозначив

$$\varphi(t) = \int_0^\infty e^{-tx} f(x)\, dx,\ \psi(t) = \int_0^\infty e^{-tx}[1 - H(x)]\, dx,$$

получим

$$\varphi(t) = \lambda F(0)\, \psi(t)\, [1 - \lambda \psi(t)]^{-1}.$$

Произведя обратное преобразование Лапласа, найдем $f(x) = F(0) f_1(x)$ и положим $p(x) = f(x)$ при $0 < x < x_1$. Рассмотрим теперь уравнение (5) в интервале (x_1, x_2):

$$p(x) - \lambda(1 - \Delta_1) \int_{x_1}^x [1 - H(x-y)]\, p(y)\, dy =$$

$$= \lambda F(0) \left\{ 1 - H(x) + \int_0^{x_1} [1 - H(x-y)]\, f_1(y)\, dy \right\}.$$

Распространяя его на интервал (x_1, ∞), при помощи преобразования Лапласа определим $p(x)$ в (x_1, x_2) и т. д. Когда $p(x)$ станет известной в интервале $(0, x_n)$, то для $x > x_n$ останется применить формулу:

$$p(x) = \lambda \int_{u}^{x_n} [1 - B(y)][1 - H(x-y)]\, p(y)\, dy + \lambda F(0)[1 - H(x)],$$

а затем найти $F(0)$ из условия (4).

3. В случае схемы 3 уравнение (3) запишется так:

$$p(x) - \lambda [1 - B(x)] \int_0^x [1 - H(x-y)]\, p(y)\, dy = \lambda F(0)[1 - B(x)][1 - H(x)]. \quad (8)$$

Если $B(x)$ — ступенчатая функция, то $p(x)$ можно определять так же, как и в случае схемы 2. Не вдаваясь в подробности, отметим один простой частный случай. Пусть время пребывания в системе ограничено постоянным $\tau > 0$, и пусть $f(x) = F(0) f_1(x)$ — решение уравнения (7), тогда p равно $f(x)$ при $x < \tau$ и равно нулю при $x > \tau$ ($F(0)$ определяется условием: $F(0)\left[1 + \int_0^{\tau} f_1(x)\, dx\right] = 1$).

4. Обратимся, наконец, к схеме 4. Уравнение (3) запишется следующим образом:

$$p(x) - \lambda \int_{u}^{x} \{1 - B[\alpha x + (1-\alpha) y]\}[1 - H(x-y)]\, p(y)\, dy =$$

$$= \lambda F(0)[1 - B(\alpha x)][1 - H(x)]. \quad (9)$$

Укажем способ его решения при постоянном τ, положив, для определенности, $\alpha > 1$. В этих условиях уравнение (9) примет такой вид:

$$p(x) - \lambda \int_{u}^{x} [1 - H(x-y)]\, p(y)\, dy = \lambda F(0)[1 - H(x)], \quad \left(0 < x < \frac{\tau}{\alpha}\right); \quad (10)$$

$$p(x) - \lambda \int_{\frac{\alpha x - \tau}{\alpha - 1}}^{x} [1 - H(x-y)]\, p(y)\, dy = 0, \quad \left(\frac{\tau}{\alpha} < x < \tau\right), \quad (11)$$

Распространив (10) на полупрямую $x > 0$, можно получить $p(x)$ для $0 < x < \tau/\alpha$. Затем (11) в интервале $(\tau/\alpha, (2\alpha - 1)\tau/\alpha^2)$ следует представить в виде

$$p(x) - \lambda \int_{\tau/\alpha}^{x} [1 - H(x-y)]\, p(y)\, dy = \lambda F(0) \int_{\frac{\alpha x - \tau}{\alpha - 1}}^{\tau/\alpha} [1 - H(x-y)]\, f_1(y)\, dy$$

и решить при $x > \tau/\alpha$.

Продолжая этот процесс до бесконечности, можно последовательно определить $p(x)$ в интервалах (x_2, x_3), (x_3, x_4), . . . , (x_{n-1}, x_n) и т. д., где $x_n = \tau\left[1 - \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^n\right]$. Число итераций, необходимое для приближенного вычисления $p(x)$, можно оценить, пользуясь неравенством $p(x) \leq \lambda$, установленным в § 2; $F(0)$ определяется нормировкой.

Автор приносит глубокую благодарность Б. В. Гнеденко и В. С. Королюку за постановку задачи и полезные советы.

Поступила в редакцию
7. 10. 59

ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Y. Barrer, Queuing with impatient customers and ordered service, Operations Res., 5 (1957), 650—656.
[2] L. Takács, Investigation of waiting — time problems by reduction to Markov processes, Acta Math., Acad. Scient. Hungarical, 1—2 (1955).
[3] Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, М., ИЛ, 1956.
[4] Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, М., ИЛ, 1954.
[5] А. Я. Хинчин, Математические методы теории массового обслуживания. Тр. Ин-та им. В. А. Стеклова, изд. АН СССР, **49**, 1955.
[6] С. М. Броді, Про інтегро-деференціальне рівняння для систем в τ-чеканням, ДАН УРСР, **6** (1959), 571—573.

SOME QUEUING PROBLEMS WITH RESTRICTIONS

I. N. KOVALENKO (KIEV)

(Summary)

A general queuing scheme is discussed in the paper for the case of a single server and Poisson input. Queuing schemes suchas a simple queuing, a system with losses, and a system with restrictions on waiting time or spending time are special cases of the proposed scheme.

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТРОГО МАРКОВСКОГО СВОЙСТВА ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ДЫНКИНА

ЛЯН ЧЖИ-ШУЭН

В [2] Е. Б. Дынкин определил широкий класс преобразований марковских процессов. Процессы $\tilde{X}$, которые получаются посредством этих преобразований из марковского процесса X, он называет (α, ξ) — подпроцессами процесса X. Цель настоящей заметки показать, что если процесс X строго марковский, то при некоторых ограничениях на α_t и ξ, (α, ξ)-подпроцесс $\tilde{X}$ также является строго марковским процессом. Один специальный случай (α, ξ)-подпроцессов был еще ранее изучен Е. Б. Дынкиным в книге [1]. В частности, им было доказано, что при образовании таких подпроцессов строго марковское свойство сохраняется. Мы покажем, что методы, использованные Е. Б. Дынкиным в этом частном случае, могут быть перенесены и на общий случай.

Пусть $X = (x_t, \zeta, M_t^s P_{s,x})$ — заданный на интервале нормальный марковский процесс в измеримом пространстве $(E, \mathfrak{B})$ с пространством элементарных событий Ω. Пусть $\alpha = \alpha_t^s(\omega)$ $(0 \leqslant s \leqslant t < \zeta(\omega))$ — мультипликативный функционал от процесса X, т. е. функция, принимающая значения из интервала $[0, \infty)$ и обладающая свойствами:

1) $\alpha_t^s M_t^s \bigcap N^s$-измерима*;

2) $\alpha_t^s(\omega)\, \alpha_\mu^t(\omega) = \alpha_u^s(\omega)$, $(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant u < \zeta(\omega))$.

Пусть, далее, $\xi = \xi_t(\omega)$, $(0 \leqslant t < \zeta(\omega))$ — неотрицательная функция, удовлетворяющая условиям

3) $\alpha_t^s \xi_t \leqslant \xi_s$ $(0 \leqslant s \leqslant t < \zeta(\omega))$;

4) $\lim_{t \downarrow s} \chi_t^s \xi_t = \alpha_t^s \xi_s$;

5) ξ_t N^t-измерима;

6) $M_{s,x} \xi_s = 1$ для всех $0 \leqslant s < \infty$ и $x \in E$.

Определение σ-алгебры $\overline{N}^s$ см. [1], стр. 43.

Тогда согласно [2] (α, ξ) — подпроцесс $\widetilde{X} = (\widetilde{x}_t, \widetilde{\zeta}, \widetilde{M}_t^s, \widetilde{P}_{s,x})$ процесса X определяется следующим образом:

$$\widetilde{\Omega} = \Omega \times [0, T]; \ \widetilde{\zeta}(\omega, \lambda) = \min(\lambda, \zeta(\omega));$$
$$\widetilde{x}_t(\omega, \lambda) = x_t(\omega) \text{ для } 0 \leqslant t < \widetilde{\rho}(\omega, \lambda);$$

$\widetilde{M}^s = M^s \times \mathfrak{B}_T^0$, где $\mathfrak{B}_T^0$ — σ-алгебра всех борелевских множеств в $[0, T]$. Пусть $\widetilde{M}_t^s$ — совокупность всех подмножеств пространства $\widetilde{\Omega}$, имеющих вид $A \times (t, T]$, где $A \in M_t^s$;

$$\widetilde{P}_{s,x}(C) = M_{s,x}\psi^s(C_\omega).$$

где $C \in \widetilde{M}^s$, $C_\omega = E\{u: (\omega, u) \in C\}$, $\psi^s(C_\omega)$—мера на σ-алгебре всех борелевских множеств на $(s, \zeta(\omega))$ такая, что $\psi^s(t, \zeta] = \alpha_t^s \xi_t$.

Из определения меры $\widetilde{P}_{s,x}$ следует, что: если $A \in M_t^s$, то

$$\widetilde{M}_{s,x}(\chi_A \chi_{\widetilde{\zeta} > t}) = M_{s,x}(\chi_A \alpha_t^s), \tag{1}$$

если η — M_t^s-измерима и $\eta\alpha_t^s$ — $P_{s,x}$-суммируема, то

$$\widetilde{M}_{s,x}(\eta \chi_{\widetilde{\zeta} > t}) = M_{s,x}(\eta \alpha_t^s); \tag{2}$$

если $A \in M^s$, то

$$\widetilde{M}_{s,x}(\chi_A \chi_{\widetilde{\zeta} > t}) = M_{s,x}(\chi_A \alpha_t^s \xi_t); \tag{3}$$

если величина η — M^s-измерима и $\eta\alpha_t^s\xi_t$ — $P_{s,x}$-суммируема, то

$$\widetilde{M}_{s,x}(\eta \chi_{\widetilde{\zeta} > t}) = M_{s,x}(\eta \alpha_t^s \xi_t). \tag{4}$$

Мы докажем следующую теорему:

Теорема. *Пусть X — непрерывный справа строго марковский процесс в топологическом измеримом пространстве $(E, \mathfrak{C}, \mathfrak{B})$, удовлетворяющий условиям* А) $\mathfrak{B} = \sigma(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C})$, Б) *для всякого $U \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ найдется $\mathfrak{B}$-измеримая, непрерывная функция $f(x)$, такая что $f(x) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $x \in U$. Тогда (α, ξ)-подпроцесс $\widetilde{X}$ процесса X является строго марковским, если α и ξ обладают следующими дополнительными свойствами*:

i) α_t^s *непрерывна справа по* s *и по* t $(0 \leqslant s \leqslant t < \zeta(\omega))$;

ii) ξ_t *непрерывна справа по* t $(0 \leqslant t < \rho(\omega))$*.

При доказательстве теоремы нам потребуются некоторые леммы.

Лемма 1. *Пусть X — строго марковский процесс, τ — случайная величина, не зависящая от будущего и s-прошлого. Пусть $\mathfrak{U}_0^s$ — σ-алгебра подмножеств в пространстве $\Omega \times I_T^s$, порожденная множествами вида $A \times [s, t]$ $(A \in N^t)$ и $\Omega \times I_t^s$ $(0 \leqslant s < t < T)$. Пусть $\Phi(\omega, t)$ $(\omega \in \Omega, t \in I^s)$ $\mathfrak{U}_0^s$-измеримая функция, такая, что $\Phi(\omega, c)$ — $P_{s,x}$-суммируема. Тогда*

$$M_{s,x}\{\Phi(\omega, \tau) \mid M_\tau^s\} = M_{t,y}\Phi(\omega, t)\Big|_{\substack{t=\tau \\ y=x_\tau}} \quad (\text{п. н. } \Omega_t, P_{s,x}). \tag{5}$$

Замечание. Легко видеть, что если $\Phi(\omega, t)$ неотрицательная, то условие суммируемости функции $\Phi(\omega, \tau)$ излишне. Разумеется, в этом случае обе части в (5) могут быть равными $+\infty$.

Эта лемма легко выводится из леммы 5.6 и теоремы 5.2 работы Е. Б. Дынкина [1] с помощью стандартного применения леммы 1.2 той же работы.

---

* Отметим, что для $\omega \in \Omega_t$ таких, что $\alpha_t^t(\omega) \neq 0$, *ii)* вытекает из свойства *i)* и *i)*

Лемма 2. *Функция* $\xi_t(\omega)$ $(0 \leqslant s < t < \zeta(\omega))$ $\mathfrak{U}_0^s$*-измерима. Для доказательства замечаем, что при фиксированном* u *функция* $\chi_{[s', u]}(t)\,\xi_u(\omega)$ $(s \leqslant s' \leqslant u)$ — $\mathfrak{U}_0^s$*-измерима. Пусть* $\{t_k^n\}$ *определяют каноническую последовательность подразделений* $\{\Delta_k^n\}$ *интервала* $[s, T]$ (см. [1], стр. 29).

Положим

$$\xi_t^{(n)}(\omega) = \sum_k \chi_{\Delta_n^k}(t)\,\xi(t_n^k, \omega),$$

тогда $\xi_k^{(n)}(\omega)$ $\mathfrak{U}_0^s$*-измеримы и из непрерывности справа функции* $\xi_t(\omega)$ *по* t *вытекает, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_t^{(n)}(\omega) = \xi_t(\omega)$. *Отсюда следует* $\mathfrak{U}_0^s$*-измеримость функции* $\xi_t(\omega)$.

Лемма 3. *Пусть* X *— строго марковский процесс,* τ *— случайная величина, не зависящая от будущего и* s*-прошлого. Пусть* $\eta(\omega)$ *—* M_τ^s*-измеримая функция такая, что* $\eta\alpha_t^s$ * $P_{s,x}$*-суммируема. Тогда*

$$\widetilde{M}_{s,x}[\eta\chi_{\widetilde{\zeta}>\tau}] = M_{s,x}\eta\alpha_\tau^s. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $A \in M_\tau^s$ и пусть $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ все рациональные числа. Имеем

$$\{A, \widetilde{\zeta} > \tau\} = \bigcup_{r_n \geqslant s} \{A, \widetilde{\zeta} > r_n \geqslant \tau\} = \bigcup_{r_n \geqslant s} \{A,\ \zeta > r_n \geqslant \tau,\ \lambda > r_n\} \in \widetilde{M}^s.$$

Далее

$$\widetilde{M}_{s,x}[\chi_A\chi_{\widetilde{\zeta}>\tau}] = \widetilde{P}_{s,x}\{A, \widetilde{\zeta} > \tau\} = M_{s,x}\{\chi_A\psi^s(\tau, T]\} = M_{s,x}\chi_A\alpha_t^s\xi_\tau. \tag{7}$$

Полагая $A = \zeta > \tau$ в (7), мы получим

$$M_{s,x}\alpha_t^s\xi_\tau \leqslant 1.$$

Поэтому $\alpha_\tau^s\xi_\tau$ $P_{s,x}$-суммируема. Так как $\xi_\tau \geqslant 0$, то по лемме 5.12 [1], лемме 1 и лемме 2

$$\widetilde{M}_{s,x}[\chi_A\chi_{\widetilde{\zeta}>\tau}] = M_{s,x}\chi_A\alpha_\tau^s\xi_\tau = M_{s,x}\{\chi_A\alpha_\tau^s M_{s,x}[\xi_\tau \mid \overline{M}_\tau^s]\} =$$
$$= M_{s,x}\{\chi_A\alpha_\tau^s[M_{t,y}\xi_t]_{\substack{t=r\\ y=x_\tau}}\} = M_{s,x}\chi_A\alpha_\tau^s.$$

Поэтому соотношение (6) верно для $\eta = \chi_A$, $A \in M_\tau^s$. Доказательство заканчивается путем стандартного применения леммы 1.2 [1].

Доказательство теоремы. Как и в теореме 5.8 [1], нам достаточно проверить, что

$$\widetilde{M}_{s,x}\{f(x_t) \mid \widetilde{M}_{\widetilde{\tau}}\} = \widetilde{M}_{\widetilde{\tau},x_{\widetilde{\tau}}} f(\widetilde{x}_t) \quad \text{(п.н. } \Omega_{\widetilde{\tau}}, \widetilde{P}_{s,x}) \tag{8}$$

для всех $x \in E$, $0 \leqslant s \leqslant t$, для любой ограниченной и непрерывной функции f и произвольной, не зависящей от будущего и s-прошлого процесса $\widetilde{X}$ — случайной величины $\widetilde{\tau} \leqslant t$.

Пусть $A \in \widetilde{M}_{\widetilde{\tau}}^s$. По лемме 5.11 [1], имеются A и τ такие, что τ — случайная величина, не зависящая от будущего и s-прошлого процесса X, $\widetilde{\tau} = \min(\tau, \widetilde{\zeta})$, $A \in M_\tau^s$, $\widetilde{A} = A\Omega_{\widetilde{\tau}}$ и $\tau \leqslant t$. Положим $F(u, y) = \widetilde{M}_{u,y} f(\widetilde{x}_t)$. Нам достаточно доказать, что

$$\widetilde{M}_{s,x}\{\chi_{\widetilde{A}} f(\widetilde{x}_t)\} = \widetilde{M}_{s,x}\chi_{\widetilde{A}} F(\widetilde{\tau}, x_{\widetilde{\tau}}). \tag{9}$$

---

* Первое утверждение леммы 5.12 в книге [1] сохраняет силу и для нашего случая, так что α_r^s $\overline{M}_\tau^s$-измерима.

Из (4) мы имеем

$$\widetilde{M}_{s,x}\{\chi_{\widetilde{A}} f(\widetilde{x}_t)\} = \widetilde{M}_{s,x}\{\chi_A f(x_t)\,\chi_{\zeta>t}\} = M_{s,x}\{\chi_A f(x_t)\,\alpha_t^s \xi_t\}. \tag{10}$$

Так как $f(x)$ ограничена, то, полагая здесь $\widetilde{A} = \{\widetilde{\zeta} > \widetilde{\tau}\}$, замечаем, что функция $f(x_t)\,\alpha_t^s \xi_t$ $P_{s,x}$-суммируема. Из леммы 5.13 [1] и свойств $\xi_t(\omega)$ вытекает, что $f(x_t)\,\alpha_t^u \xi_t$, как функция (u, ω) $\mathfrak{U}_0^s$-измерима. Без ограничения общности можно считать $f(x)$ неотрицательной. Тогда из (10), леммы 3 и 4 вытекает, что

$$\widetilde{M}_{s,x}\{\chi_{\widetilde{A}} f(\widetilde{x}_t) = M_{s,x}\{\chi_A f(x_t)\,\alpha_t^s \xi_t\} = M_{s,x}\{\chi_A f(x_t)\,\alpha_c^s \alpha_t^\tau \xi_t\} =$$

$$= M_{s,x}\{\chi_A \alpha_\tau^s M_{s,x}[f(x_t)\,\alpha_t^\tau \xi_t \mid M_\tau^s]\} = M_{s,x}\{\chi_A \alpha_\tau^s [M_{u,y} f(x_t)\,\alpha_t^u \xi_t]_{\substack{u=\tau \\ y=x_\tau}}\} =$$

$$= M_{s,x}\{\chi_A \alpha_\tau^s [\widetilde{M}_{u,y} f(x_t)\,\chi_{\widetilde{\zeta}>t}]_{\substack{u=\tau \\ y=x_\tau}}\} = M_{s,x}\{\chi_A \alpha_\tau^s [\widetilde{M}_{u,y} f(x_t)]_{\substack{u=\tau \\ y=x_\tau}}\} =$$

$$= M_{s,x}\{\chi_A \alpha_\tau^s F(\tau, x_\tau)\} = \widetilde{M}_{s,x}\{\chi_A F(\tau, x_\tau)\,\chi_{\widetilde{\zeta}>\tau}\} = \widetilde{M}_{s,x}\{\chi_{\widetilde{A}} F(\tau, x_\tau)\}.$$

Теорема доказана.

Поступила в редакцию
12.4.1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Б. Дынкин, Основания теории марковских процессов, Физматгиз, 1959.
[2] Е. Б. Дынкин, О некоторых преобразованиях марковских процессов, ДАН СССР, **133**, 2 (1960), 269—273.

INVARIABILITY OF THE STRONG MARKOV PROPERTY IN THE TRANSFORMATIONS OF E. B. DYNKIN

LEUNG CHI-SON *(MOSCOW)*

(Summary)

E. B. Dynkin in [2] has defined a large class of transformations of Markov processes. He calls such processes obtained by these transformations $\widetilde{X}$ and (α, ξ)-subprocesses of the process X. In this paper we prove that if the process X is a strong Markov process, then, with some conditions imposed on α and ξ, the (α, ξ) subprocess will also be a strong Markov process. One special case of a (α, ξ)-subprocess has been examined earlier by E. B. Dynkin in his book [1]. He proved in particular that the strong Markov property does not change in the formation of subprocesses. We show that the method he used for the special case can be carried over to the general case.

О СВЯЗИ ПОНЯТИЙ КОЛЛЕКТИВА МИЗЕСА — ЧЕРЧА И НОРМАЛЬНОЙ ПО БЕРНУЛЛИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗНАКОВ

Л. П. ПОСТНИКОВА

Р. Мизес ввел понятие коллектива (см. [1]). Бесконечная последовательность

$$a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots, \tag{1}$$

состоящая из нулей и единиц, называется коллективом, если

1) асимптотическая частота появления единицы в последовательности (1) существует (обозначим ее p, $0 < p < 1$);

2) какую бы подпоследовательность мы не выделили с помощью характеристической функции, зависящей от n и $a_1, \ldots, a_{n-1}$, в этой подпоследовательности асимптотическая частота появления единицы тоже равна p.

Как указал Черч ([2]), не существует ни одной последовательности, которая была бы коллективом; однако понятие коллектива можно так видоизменить, что коллективы существуют. А. Копеленд [3] и Г. Рейхенбах [4] ввели понятие допустимого числа.

Определение 1. Пусть имеется число $0 < p < 1$ и бесконечная последовательность, составленная из знаков 0 и 1

$$a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots .$$

Эта последовательность называется допустимым числом, если для любого натурального m и для любых различных неотрицательных целых чисел $r_1, r_2, \ldots, r_k$, меньших m последовательность

$$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p, \ldots, \tag{2}$$

где

$$\beta_n = a_{nm+r_1}, a_{nm+r_2}, \ldots, a_{nm+r_k}, \quad n=0,1,2,\ldots,$$

обладает тем свойством, что относительная частота появления единицы в последовательности (2) стремится при $n \to \infty$ к p^k. А. Г. Постников и И. И. Пятецкий [5] ввели понятие нормальной по Бернулли последовательности знаков.

Определение 2. Пусть дано положительное число $p < 1$. Пусть имеется, бесконечная последовательность, состоящая из знаков 0 и 1,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p, \ldots . \tag{3}$$

Пусть s — любое натуральное число. Запишем последовательность (3) в виде «гусеницы»:

$$(a_1, \ldots, a_s), (a_2, \ldots, a_{s+1}), \ldots, (a_p, \ldots, a_{p+s-1}), \ldots . \tag{4}$$

Пусть $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_s)$ — какая-либо s-членная скобка, состоящая из знаков 0 и 1. Обозначим через $N_p(\Delta)$ количество появлений скобки Δ до P-го члена последовательности (4). Последовательность (3) назовем нормальной по Бернулли последовательностью знаков, если для любого натурального s и любой s-членной скобки

$$\lim_{P\to\infty} \frac{N_P(\Delta)}{P} = p^j q^{s-j},$$

где j — количество единиц среди знаков $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_s)$ и $q = 1 - p$.

В монографии [6] § 11 доказана эквивалентность определений допустимого числа и нормальной по Бернулли последовательности знаков. Естественно поставить вопрос, в каком отношении находятся понятие коллектива Мизеса — Черча и понятие нормальной по Бернулли последовательности знаков. Покажем, что понятие нормальной по Бернулли последовательности знаков получается сужением понятия коллектива.

Определение 3. Пусть дано вещественное число p, $0 < p < 1$. Бесконечную последовательность, составленную из знаков 0 и 1:

$$a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots, \tag{5}$$

назовем нормальной по Бернулли последовательностью знаков, если:

1) асимптотическая частота появления единицы существует и равна p;

2) каково бы ни было натуральное s и какая бы ни была s-членная комбинация Δ, составленная из знаков 0 и 1, она встречается в последовательности бесконечное число раз и если составить подпоследовательность, состоящую из знаков, непосредственно следующих за появлением Δ, то асимптотическая частота появления 1 в этой подпоследовательности существует и равна p.

Теорема. *Определения 2 и 3 нормальной по Бернулли последовательности знаков эквивалентны.*

Доказательство. Пусть имеется последовательность знаков (3), нормальная по Бернулли в смысле определения 2. Пусть s — любое натуральное число. Возьмем s-членную скобку Δ_s, содержащую j единиц и $s-j$ нулей ($j=0, 1, \ldots, s$) и $s+1$-членную скобку такую, что первые s знаков являются скобкой Δ_s. До P-го места последовательности

$$(a_1, \ldots, a_{s+1}), (a_2, \ldots, a_{s+2}), \ldots, (a_P, \ldots, a_{P+s+1}) \ldots \quad (6)$$

$s+1$-членная скобка $(\Delta_s, 1)$ встретится $Pp^{j+1}(1-p)^{s-j}+o(P)$ раз. Составим из членов, непосредственно следующих за Δ_s, последовательность

$$b_1, b_2, \ldots, b_{P'}, \ldots . \quad (7)$$

Очевидно, что каждый раз появление Δ_s в последовательности (4) вызывает добавление одного члена к последовательности (7). До P-го места последовательности (4) Δ_s встретится $P'=Pp^j(1-p)^{s-j}+o(P)$ раз, столько же появится и членов соответственно в последовательности (7). Появление единицы в последовательности (7) эквивалентно появлению скобки $(\Delta_s, 1)$ в последовательности (6). Следовательно, среди P' первых членов последовательности (7) единица появится $Pp^{j+1}(1-p)^{s-j}+o(P)$ раз. Значит, асимптотическая частота появления единицы в последозательности (7) равна

$$\lim_{P'\to\infty}\frac{Pp^{j+1}(1-p)^{s-j}+o(P)}{P'}=\lim_{P\to\infty}\frac{Pp^{j+1}(1-p)^{s-j}+o(P)}{Pp^j(1-p)^{s-j}}=p.$$

Отсюда следует, что последозательность (3) нормальна в смысле определения 3. Пусть имеется последовательность (5), нормальная по Бернулли в смысле определения 3. Докажем, что последовательность (5) нормальная по Бернулли в смысле определения 2. Доказательство проведем индукцией по s. Для $s=1$ по 1 требованию определения 3 асимптотическая частота появления единицы в последовательности (5) равна p, а нуля $1-p$.

Пусть для любой s-членной скобки Δ_s, содержащей j единиц и $s-j$ нулей ($j=0, 1, \ldots, s$), асимптотическая частота появления Δ_s в последовательности

$$(a_1, \ldots, a_s), (a_2, \ldots, a_{s+1}), \ldots, (a_P, \ldots, a_{P+s-1}), \ldots \quad (8)$$

равна $p^j(1-p)^{s-j}$. Значит, до P-го члена последовательности (8) Δ_s встретится $P'=Pp^j(1-p)^{s-j}+o(P)$ раз и соответственно столько же членов появится в последовательности

$$b_1, b_2, \ldots, b_{P'}, \ldots, \quad (9)$$

состоящей из членов, непосредственно следующих за Δ_s.

Для $s+1$-членной скобки возможны два случая:

$$\Delta_{s+1}=(\Delta_s, 1) \text{ и } \Delta'_{s+1}=(\Delta_s, 0).$$

Появление Δ_{s+1} (или Δ'_{s+1}) в последовательности

$$(a_1, \ldots, a_{s+1})(a_2, \ldots, a_{s+2}), \ldots, (a_P, \ldots, a_{P+s}), \ldots \quad (10)$$

эквивалентно появлению единицы (или нуля) в последовательности (9). Значит,

Δ_{s+1} (Δ'_{s+1}) появится до P-го члена последовательности (10) $P'p + o(P') = Pp^{j+1}(1-p)^{s-j} + o(P)$ ($Pp^j(1-p)^{s-j+1} + o(P)$) раз. Следовательно, для любой $s+1$-членной скобки $\overline{\Delta}_{s+1}$, состоящей из j единиц и $s+1-j$ нулей ($j=0, 1, \ldots, s+1$), асимптотическая частота появления $\overline{\Delta}_{s+1}$ в последовательности (10) равна $p^j(1-p)^{s-j+1}$.

Значит, последовательность (5) нормальная по Бернулли в смысле определения 2.

Я благодарю П. С. Новикова за постановку задачи.

Поступила в редакцию
7.7.60

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Мизес, Вероятность и статистика, М., Госиздат, 1930.
[2] A. Church, On the concept of a random sequence, Bull. of the Americ. Math. Soc., **46** (1940), 130—135.
[3] A. Copeland, Admissible numbers in the theory of probability, Americ. Journ. of Math., **50** (1928), 535—552.
[4] H. Reichenbach, Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechung, Math. Zeit., Bd. **34** (1932), 568—619.
[5] А. Г. Постников, И. И. Пятецкий, Нормальные по Бернулли последовательности знаков, Изв. АН СССР, серия матем., **21**, 4 (1957), 501—514.
[6] А. Г. Постников, Арифметическое моделирование случайных процессов, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, АН СССР, выпуск 57 (1960).

ÜBER DIE ZUSAMMENHANG DER BEGRIFFE DES KOLLEKTIVES VON MISES — CHURCH UND DER NACH BERNOULLI NORMALEN ZEICHENFOLGE

L. P. POSTNIKOVA (MOSKAU)

(Zusammenfassung)

Es gibt die neue Bestimmung der nach Bernoulli normalen Zeichenfolge.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ТИПА

Э. М. ХАЗЕН

1. В данной статье рассматриваются системы стохастических дифференциальных уравнений

$$dy_i = F_i(y_1, \ldots, y_n, t)\,dt + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,d\zeta_j(t), \quad i = 1,2, \ldots, n, \tag{1}$$

где $\zeta_j(t)$ — независимые винеровские процессы [5]. Уравнения (1) записывают также в виде

$$\frac{dy_i}{dt} = F_i(y_1, \ldots, y_n, t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\xi_j(t)$ — гауссовские процессы белого шума.

Такие уравнения возникают при рассмотрении электрических цепей, следящих систем и в других задачах. Для систем, описывающихся *разными* дифференциальными уравнениями в различных областях фазового пространства, функции F_i и a_{ij} являются *кусочно-гладкими*.

Предполагается, что $F_i(y_1, \ldots, y_n)$ — кусочно-линейные функции, а a_{ij} — кусочно-постоянны. Требуется определить плотность распределения вероятностей $P(y_1, \ldots, y_n, t)$ для марковского процесса $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$.

2. Работа опирается на следующие теоремы, вытекающие из результатов [1—7].

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{y}(t)$ — *n-мерный марковский случайный процесс, почти все траектории которого непрерывны, удовлетворяющий условиям*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}\{y_i(t+\Delta t) - y_i(t) \mid \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}\} = A_i(\mathbf{x}, t),$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}\{(y_i(t+\Delta t) - y_i(t))(y_j(t+\Delta t) - y_j(t)) \mid \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}\} = B_{ij}(\mathbf{x}, t),$$

(*здесь* $\mathbf{M}\{\ldots \mid \ldots\}$ — *условное математическое ожидание,* $i, j = 1, \ldots, n$), *где* A_i, B_{ij} — *функции, непрерывные вместе со своими производными* *, *и* $\sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}\lambda_i\lambda_j$ — *положительно определенная квадратичная форма. Тогда для процесса* $\mathbf{y}(t)$ *существует плотность распределения вероятностей* $P(\mathbf{y}, t)$, *которая должна удовлетворять уравнению Колмогорова*

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\{A_i P\} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\{B_{ij} P\}. \tag{2}$$

Теорема 2. [1]. *Пусть* $g(\mathbf{y}, t; \boldsymbol{\eta}, \tau)$ — *плотность вероятности перехода из точки* $\boldsymbol{\eta}$, *занимаемой в момент* τ, *в окрестность точки* $\mathbf{y}$ *к моменту* t *для марковского процесса* $\mathbf{y}(t)$, *удовлетворяющего условиям теоремы* 1. *Тогда функция* $g(\mathbf{y}, t; \boldsymbol{\eta}, \tau)$, $t > \tau$ *удовлетворяет уравнению* (2) *по переменным* $y_1, \ldots, y_n, t$; *по переменным* $\eta_1, \ldots, \eta_n, \tau$ *функция* g *удовлетворяет сопряженному к* (2) *уравнению*:

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^{n} A_i(\boldsymbol{\eta}, \tau) \frac{\partial g}{\partial \eta_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} B_{ij}(\boldsymbol{\eta}, \tau) \frac{\partial^2 g}{\partial \eta_i \partial \eta_j} = 0. \tag{3}$$

Кроме того, при $t - \tau \to 0$ $g(\mathbf{y}, t; \boldsymbol{\eta}, \tau) \to \delta(\mathbf{y} - \eta)$, *где* δ — *дельта-функция*.

3. Уравнению (2) можно дать механическое истолкование, рассматривая $P(\mathbf{y}, t)$ как плотность некоторой массы, распределенной в n-мерном пространстве. В этом случае интеграл

$$F(\Omega, t) = \int_{\Omega} P(\mathbf{y}, t)\, d\mathbf{y}$$

численно равен массе, находящейся в объеме Ω, ограниченном поверхностью S. Про-

---

* Для функций A_i достаточно непрерывности и ограниченности первых производных x (по x_i) и ограниченности вторых; для функций B_{ij} — непрерывности первых и вторых производных, ограниченности третьих и выполнения условия:

$$\gamma_1 \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}\lambda_i\lambda_j \leqslant \gamma_2 \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j,$$

где γ_1, γ_2 — постоянные.

цесс $\mathbf{y}(t)$ не имеет точек рождения или гибели, и изменение $F(\Omega, t)$ соответствует потоку «массы» через поверхность S:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{d}{dt}\int_{\Omega}\dots\int P(\mathbf{y}, t)\, d\mathbf{y} = -\int_{S}\dots\int \varphi_n dS_n,$$

где dS_n — элемент поверхности с нормалью $\mathbf{n}$ (направленной внутрь Ω) и φ_n есть плотность потока «массы» в направлении $\mathbf{n}$. Отсюда по теореме Стокса

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_{y_i}}{\partial y_i} = 0, \qquad (4)$$

где φ_{y_i} — плотность потока в направлении y_i. Из сравнения (2) и (4) видно, что выражения $A_i P - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_j}\{B_{ij}P\}$ можно рассматривать как плотности «потоков массы» в направлении y_i $(i = 1, \dots, n)$.

Такая интерпретация позволяет формулировать граничные условия для уравнения (2) при решении различных задач.

4. Если в уравнениях (1) функции F_i и a_{ij} являются *кусочно-гладкими*, то в каждой из областей значений $\mathbf{y}$, где все эти функции непрерывны и дифференцируемы нужное число раз, процесс $\mathbf{y}(t)$, определенный системой (1), удовлетворяет условиям теоремы 1, причем $A_i(\mathbf{y}, t) = F_i(\mathbf{y}, t)$, $B_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$; поэтому в каждой из областей гладкости функций A_i и B_{ij} плотность вероятности $P(\mathbf{y}, t)$ удовлетворяет уравнению (2) с соответствующими коэффициентами. Условия на границах этих областей, в силу п. 3, сводятся к непрерывности плотности потока P через границу и (если этого условия недостаточно) к непрерывности плотности вероятности P на границе.

Для систем с нелинейностями кусочно-линейного типа функции F_i — кусочно-линейны, a_{ij} — кусочно-постоянны, и границами областей гладкости служат плоскости. На этих плоскостях плотность вероятности P принимает какие-то значения P^*; обозначим также $\partial P^*/\partial n$ производную от P по направлению нормали к этим плоскостям. Внутри каждой из областей решение уравнения (2) может быть представлено в интегральной форме через значения P^* и $\partial P^*/\partial n$ на границе области. Используя граничные условия, получим систему линейных интегральных уравнений для определения неизвестных функции P^* и $\partial P^*/\partial n$. Интегральная форма решения уравнения (2) в данной области определяется с помощью фундаментального решения уравнения (2), продолженного из этой области на все пространство. При этом используется теорема 2, в силу которой фундаментальное решение уравнения (2) рассматриваемого во всем пространстве, совпадает с переходной вероятностью некоторого случайного марковского процесса. В случае кусочно-линейных систем этот марковский процесс будет описываться *линейными* дифференциальными уравнениями и его переходную вероятность нетрудно найти.

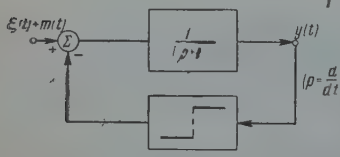


Рис. 1

Следующие ниже примеры подробнее раскрывают содержание изложенной в п. 4 программы отыскания $P(\mathbf{y}, t)$.

Пример 1. Релейная система. Случайная функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$T\frac{dy}{dt} + y + \varphi(y) = a\xi(t) + m(t),$$

где $\varphi(y) = A\operatorname{sgn} y$, $\xi(t)$ — гауссовский белый шум, a — const, $\mathbf{M}\xi(t) = 0$, $\mathbf{M}\{\xi(t)\,\xi(t+\tau)\} = \delta(\tau)$; $m(t)$ — заданная функция времени.

Требуется найти плотность вероятности $P(y, t)$, $t > t_0$. Если $y > 0$, то в силу п. 2 и п. 4:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{m(t) - y - A}{T} P\right\} = \frac{a^2}{2T^2}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}.$$

Если $y < 0$, то

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{m(t) - y + A}{T} P\right\} = \frac{a^2}{2T^2}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}.$$

Граничные условия при $y = 0$, в соответствии с п. 3, следующие:

1) $[P(y, t)]_{y=-0} = [P(y, t)]_{y=+0}$;

2) $\frac{a^2}{2T}\left[\frac{\partial P(y, t)}{\partial y}\right]_{y=-0} - \frac{a^2}{2T}\left[\frac{\partial P(y, t)}{\partial y}\right]_{y=+0} = 2AP(0, t)$.

При $t = t_0$ задано начальное распределение $P(y, t_0) = f(y)$. В частном случае, когда $f(y) = \delta(y - x)$, функция P, удовлетворяющая уравнениям, граничным условиям и начальному условию, совпадает с плотностью переходной вероятности случайного процесса $y(t)$: $P(y, t) = g(y, t; x, t_0)$.

Обозначим $P(0, t) = p_1(t)$, $\left[\frac{\partial P(y, t)}{\partial y}\right]_{y=+0} = p_2(t)$. Представим $P(y, t)$ при $y > 0$ и при $y < 0$ в виде интегралов от этих функций. Для этого рассмотрим уравнение для P в области $y > 0$:

$$\mathfrak{L}[P(y, t)] \equiv -\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{m(t) - y - A}{T} P\right\} + \frac{a^2}{2T^2}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

Продолжим его на все значения y. Сопряженное уравнение будет иметь вид:

$$\mathfrak{M}[\Phi(\eta, \tau)] \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\left\{\frac{m(\tau) - \eta - A}{T}\right\} + \frac{a^2}{2T^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0.$$

Фундаментальное решение уравнения $\mathfrak{L}[P] = 0$ является плотностью переходной вероятности для марковского процесса, удовлетворяющего уравнению

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{1}{T} y_1 + \frac{m(t) - A}{T} + \frac{a}{T}\xi(t)$$

при всех значениях y_1. Этот процесс является гауссовским, так как $\xi(t)$ — гауссовский и уравнение линейное. Плотность переходной вероятности $g_1(y, t; \eta, \tau)$, таким образом, полностью определяется своими средним значением и дисперсией, которые можно найти из последнего уравнения. Для $\mathbf{M}\{y_1(t) \mid y_1(\tau) = \eta\} = M(t; \eta, \tau)$ имеем

$$\frac{dM}{dt} = \frac{m(t) - A - M}{T}, \quad t > \tau,$$

с начальным условием $M(\tau; \eta, \tau) = \eta$. Дисперсия $\mathbf{D}(t; \tau) = \mathbf{M}\{(y_1(t) - M)^2 \mid y_1(\tau) = \eta\}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2}\frac{d\mathbf{D}}{dt} = -\frac{\mathbf{D}}{T} + \frac{a^2}{2T^2}, \quad t > \tau,$$

с начальным условием $\mathbf{D}(\tau, \tau) = 0$. Отсюда

$$\mathbf{D} = \frac{a^2}{2T}\left[1 - e^{-\frac{2(t-\tau)}{T}}\right]; \quad M = \eta e^{-\frac{(t-\tau)}{T}} + \int_\tau^t \frac{m(u) - A}{T} e^{\frac{u-t}{T}} du.$$

Таким образом, функция g_1 представляет собой плотность нормального распределения с параметрами $(M, \sqrt{\mathbf{D}})$.

Рассмотрим теперь выражение

$$\Phi(\eta, \tau)\, \mathfrak{L}(P(\eta, \tau)) - P(\eta, \tau)\, \mathfrak{M}(\Phi(\eta, \tau)) \equiv$$

$$\equiv -\frac{\partial}{\partial \tau}[\Phi P] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\frac{a^2}{2T^2}\,\Phi\,\frac{\partial P}{\partial \eta} - \frac{a^2}{2T^2}\,P\,\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \frac{m(\tau) - \eta - A}{T}\,\Phi P\right\}.$$

Пусть P — искомое решение, а в качестве Φ возьмем $g_1(y, t; \eta, \tau)$ как функцию двух последних аргументов. Рассмотрим равенство

$$\int_{t_0}^{t-\varepsilon} du \int_0^L \{\Phi(\eta, u)\, \mathfrak{L}(P(\eta, u)) - P(\eta, u)\, \mathfrak{M}(\Phi(\eta, u))\}\, d\eta = 0.$$

По формуле Грина левая часть равна криволинейному интегралу

$$\oint_{(\Gamma)} \Phi P\, d\eta + \left\{\frac{a^2}{2T^2}\,\Phi\,\frac{\partial P}{\partial \eta} - \frac{a^2}{2T^2}\,P\,\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \frac{m(u) - A - \eta}{T}\,\Phi P\right\} du,$$

где Γ — контур, ограничивающий область $t_0 \leqslant u \leqslant t - \varepsilon$, $0 \leqslant \eta \leqslant L$. Подставляя $g_1(y, t; \eta, \tau)$ вместо $\Phi(\eta, \tau)$ и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и $L \to \infty$, получим искомое интегральное представление функции $P(y, t)$ в области $y > 0$ через граничные функции $p_1(t)$ и $p_2(t)$:

$$P(y, t) = \int_0^\infty f(\eta)\, g_1|_{\tau = t_0}\, d\eta +$$

$$+ \frac{a^2}{2T^2} \int_{t_0}^{t} \left\{\left[2T\,\frac{m(\tau) - A}{a^2}\,p_1(\tau) - p_2(\tau)\right] g_1\Big|_{\eta=0} + p_1(\tau)\,\frac{\partial g_1}{\partial \eta}\Big|_{\eta=0}\right\} d\tau.$$

При переходе к пределу при $\varepsilon \to 0$ и $L \to \infty$ учтено, что если $y > 0$, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\infty g_1(y, t; \eta, t - \varepsilon)\, P(\eta, t - \varepsilon)\, d\eta = P(y, t),$$

и что функция P убывает при $|y| \to \infty$ так, что при $L \to \infty$ интеграл по части контура $\eta = L$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t - \varepsilon$ стремится к нулю.

Аналогичным образом можно показать, что при $y < 0$ формула для $P(y, t)$ сохраняет свой вид с той разницей, что в первом слагаемом интегрирование производится от $-\infty$ до 0, перед вторым слагаемым будет стоять знак «минус» и, вместо g_1, появится функция $g_2(y, t; \eta, \tau)$ — плотность переходной вероятности для марковского процесса $y_2(t)$, удовлетворяющего уравнению

$$\frac{dy_2}{dt} = -\frac{1}{T}\,y_2 + \frac{m(t) + A}{T} + \frac{a}{T}\,\xi(t).$$

Отсюда следует, что $g_2(y, t; \eta, \tau)$ — плотность нормального распределения для величины y_2 с математическим ожиданием и дисперсией, равными соответственно

$$\eta e^{-\frac{1}{T}(t-\tau)} + \int_\tau^t \frac{m(u) + A}{T}\, e^{-\frac{1}{T}(t-u)}\, du \quad \text{и} \quad \frac{a^2}{2T^2}\left[1 - e^{-\frac{2}{T}(t-\tau)}\right].$$

Используя граничные условия, получаем для определения функций $p_1(t)$ и $p_2(t)$ систему линейных уравнений типа Вольтерра второго рода:

$$p_1(t) = \int_{-\infty}^{0} f(\eta)\, g_2\Big|_{\substack{y=0\\ t=t_0}} d\eta -$$

$$- \frac{a^2}{2T^2}\int_{t_0}^{t}\left\{\left[2T\,\frac{m(\tau)-A}{a^2}\,p_1(\tau) - p_2(\tau)\right] g_2\Big|_{\substack{y=0\\ \eta=0}} + p_1(\tau)\,\frac{\partial g_2}{\partial \eta}\Big|_{\substack{y=0\\ \eta=0}}\right\} d\tau,$$

$$p_2(t) = \int_{0}^{\infty} f(\eta)\,\frac{\partial g_1}{\partial y}\Big|_{\substack{y=0\\ t=t_0}} d\eta +$$

$$+ \frac{a^2}{2T^2}\int_{t_0}^{t}\left\{\left[2T\,\frac{m(\tau)-A}{a^2}\,p_1(\tau) - p_2(\tau)\right]\frac{\partial g_1}{\partial y}\Big|_{\substack{y\ \ 0\\ \eta\ \ 0}} + p_1(\tau)\,\frac{\partial^2 g_1}{\partial y\partial\eta}\Big|_{\substack{y\ \ 0\\ \eta=0}}\right\} d\tau.$$

Если $f(\eta) = \delta(\eta - x)$, то P равна плотности переходной вероятности $g(y, t; x, t_0)$ процесса $y(t)$ и первые слагаемые в правых частях совпадают с подынтегральными функциями при $\eta = x$ — интегрирование по η исчезает. Решение системы интегральных уравнений можно найти методом последовательных приближений.

Пример 2. Линейный инерционный детектор. Схема детектора показана на рис. 2; $\eta(t)$ — величина напряжения на входе, $x(t)$ — напряжение на выходе. Функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx}{dt} + x = \varphi(\eta - x), \text{ где } \varphi(z) = \begin{cases} az, & \text{если } z > 0,\\ 0, & \text{если } z < 0. \end{cases} \quad (a > 0) \tag{5}$$

Пусть $\eta(t)$ — стационарный гауссовский процесс со спектральной плотностью $f_\eta(\lambda) = b/[2\pi(\alpha^2 + \lambda^2)]$, тогда $\eta(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\eta}{dt} + \alpha\eta(t) = \sqrt{b}\,\xi(t), \tag{6}$$

где $\xi(t)$—белый шум. Уравнения (5) и (6) определяют двумерный марковский процесс (η, x). Сделаем замену переменных и рассмотрим марковский процесс $(y_1, y_2) = (\eta - x, x)$, тогда

$$\frac{dy_1}{dt} = -\alpha y_1 - (\alpha - 1)\,y_2 - \varphi(y_2) + \sqrt{b}\,\xi(t),$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -y_2 + \varphi(y_1).$$

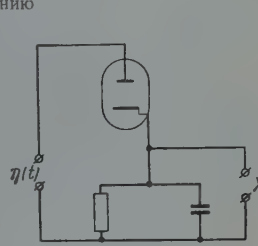


Рис. 2

Плотность вероятности $P(y_1, y_2; t)$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y_1}\{[(\alpha + a)y_1 + (\alpha - 1)\,y_2]\,P\} + \frac{\partial}{\partial y_2}\{(ay_1 - y_2)\,P\} = \frac{b}{2}\,\frac{\partial^2 P}{\partial y_1^2} \quad (y_1 > 0),$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y_1}\{[\alpha y_1 + (\alpha - 1)\,y_2]\,P\} + \frac{\partial}{\partial y_2}\{-y_2 P\} = \frac{b}{2}\,\frac{\partial^2 P}{\partial y_1^2} \quad (y_1 < 0).$$

Граничные условия при $y_1 = 0$ — непрерывность P и $\partial P/\partial y_1$. Начальное условие при $t = 0$: $P(y_1, y_2, 0) = f(y_1, y_2)$ (если $f(y_1, y_2) = \delta(y_1 - x_1, y_2 - x_2)$, то искомая плотность P совпадает с плотностью переходной вероятности для процесса $(y_1(t), y_2(t))$: $P = g(y_1, y_2, t; x_1, x_2, 0)$).

Пусть $P_1(y_2, t)$ и $P_2(y_2, t)$ — значения P и $\partial P/\partial y_1$ на границе $y_1 = 0$. Рассуждая аналогично предыдущему и используя формулу Гаусса—Остроградского, вместо формулы Грина, получим в области $y_1 > 0$

$$P(y_1, y_2; t) = \int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta_1, \eta_2)\, g_1|_{\tau=0}\, d\eta_1 d\eta_2 -$$

$$-\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[(1-\alpha)\,\eta_2 P_1(\eta_2,\tau)+\frac{b}{2}P_2(\eta_2,\tau)\right]g_1\Big|_{\eta_1=0}-\frac{b}{2}P_1(\eta_2,\tau)\frac{\partial g_1}{\partial\eta_1}\Big|_{\eta_1=0}\right\}d\tau d\eta_2,$$

где $g_1(y_1, y_2, t; \eta_1, \eta_2, \tau)$ как функция y_1 и y_2 представляет собой плотность двумерного нормального распределения, математические ожидания которого удовлетворяют системе уравнений ($t > \tau$):

$$\frac{dm_1}{dt} = -(\alpha + a)\,m_1 - (\alpha - 1)\,m_2,$$

$$\frac{dm_2}{dt} = am_1 - m_2$$

с начальными условиями $m_1(\tau) = \eta_1$ и $m_2(\tau) = \eta_2$, а элементы корреляционной матрицы (D_{ij}) есть решение системы ($t > \tau$):

$$\frac{dD_{11}}{dt} = -2(\alpha + a)\,D_{11} - 2(\alpha - 1)\,D_{12} + b$$

$$\frac{dD_{12}}{dt} = aD_{11} - (\alpha + a + 1)\,D_{12} - (\alpha - 1)\,D_{22}, \qquad (D_{21}=D_{12})$$

$$\frac{dD_{22}}{dt} = 2aD_{12} - 2D_{22}$$

с нулевыми начальными условиями: $D_{ij}(\tau, \tau) = 0$, $i, j = 1,2$.

Аналогичным образом можно показать, что в области $y_1 < 0$ формула для P сохраняет свой вид с той разницей, что в первом слагаемом интегрирование по η_1 производится от $-\infty$ до 0, перед вторым слагаемым будет стоять знак «плюс» и вместо g_1 появится некоторая другая плотность нормального распределения g_2.

Используя граничные условия, получим систему линейных интегральных уравнений для функций $P_1(y_2, t)$ и $P_2(y_2, t)$:

$$P_1(y_2,t) = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta_1,\eta_2)\,g_1\Big|_{\substack{y_1=0\\ \tau=0}} d\eta_1 d\eta_2 -$$

$$-\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[(1-\alpha)\,\eta_2 P_1(\eta_2,\tau)+\frac{b}{2}P_2(\eta_2,\tau)\right]g_1\Big|_{\substack{y_1=0\\ \eta_1=0}}-\frac{b}{2}P_1(\eta_2,\tau)\frac{\partial g_1}{\partial\eta_1}\Big|_{\substack{y_1=0\\ \eta_1=0}}\right\}$$

$$P_2(y_2,t) = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta_1,\eta_2)\frac{\partial g_2}{\partial y_1}\Big|_{\substack{y_1=0\\ \tau=0}} d\eta_1 d\eta_2 +$$

$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[(1-\alpha)\,\eta_2 P_1(\eta_2,\tau)+\frac{b}{2}P_2(\eta_2,\tau)\right]\frac{\partial g_2}{\partial y_1}\Big|_{\substack{y_1=0\\ \eta_1=0}}-\right.$$

$$\left.-\frac{b}{2}P_1(\eta_2,\tau)\frac{\partial^2 g_2}{\partial y_1\partial\eta_1}\Big|_{\substack{y_1=0\\ \eta_1=0}}\right\}d\tau d\eta_2$$

система уравнений второго рода; по t — типа Вольтерра, а по y_2 — типа Фредгольма). Если плотность P равна $g(y_1, y_2, t; x_1, x_2, 0)$, то первые слагаемые в правых частях системы совпадают со значениями своих подынтегральных функций при $\eta_1 = x_1$, $\eta_2 = x_2$.

Ядра уравнений определяются гауссовскими плотностями вероятностей g_1 и g_2, которые достаточно быстро убывают при $|y_1|, |y_2| \to \infty$ и поэтому разлагаются в ряд по ортогональным функциям Чебышева-Эрмита. Коэффициенты этого разложения выражаются через математические ожидания $m_k(t, \tau; \eta_1, \eta_2)$ и корреляционную матрицу $(D_{kl}(t, \tau))$ $(k, l = 1,2)$, указанные выше.

Аппроксимируя g_1 и g_2 частными суммами ряда, получим линейные интегральные уравнения с вырожденными ядрами. Решение таких уравнений сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений и может быть осуществлено, например, методом наискорейшего спуска. Точность полученного решения можно оценить с помощью известных формул теории линейных интегральных уравнений [8—10].

Рассуждения, проведенные в примерах 1 и 2, применимы к любым кусочно-линейным системам с «вынуждающими» случайными функциями, являющимися непрерывными марковскими или гауссовскими (последние можно заменить — точно или приближенно — компонентами многомерных непрерывных марковских процессов).

Изложенный метод определения плотности вероятности для случайного процесса в кусочно-линейной системе представляет собой развитие работы автора, выполненной в 1958—59 гг. под руководством Андрея Николаевича Колмогорова.

Поступила в редакцию
20.10.60

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Об аналитических методах в теории вероятностей, Успехи матем. наук, **5** (1938), 5—41.
[2] В. Феллер, К теории стохастических процессов, Успехи матем. наук, 5 (1938), 57—96.
[3] R. Fortet, Les fonctions aléatoires du type de Markoff associées à certaines équations linéaires aux derivées partielles du type parabolique, J. Math. Pures Appl., **22** (1943), 177—243.
[4] Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, М., ИЛ, 1956.
[5] К. Ито, Стохастические дифференциальные уравнения, Математика, **1** : 1 (1957), 78—116.
[6] Г. Маруяма, Непрерывные стохастические процессы, Математика, **1** : 2 (1957), 125—159.
[7] Dressel, The fundamental solution of the parabolic equation, Duke Math. Journal; **7**, 186 (1940); **13**, 61 (1946).
[8] Л. В. Канторович, Функциональный анализ и прикладная математика, Успехи матем. наук, **6** (29) (1948), 89—185.
[9] Г. Мюнтц, Интегральные уравнения, М., ОНТИ, ГТТИ, 1934.
[10] А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, М., ГТТИ, 1953.

ESTIMATING THE PROBABILITY DENSITY FOR RANDOM PROCESSES IN SYSTEMS WITH NONLINEAR REFORMERS OF THE PIECING-LINEAR TYPE

E. M. KHASEN (*MOSCOW*)

(*Summary*)

A system of stochastic Ito differential equations is dealt within this paper:

$$dy_i = F(y_1, \ldots, y_n, t)\, dt + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} d\zeta_j(t),$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$ where $\zeta_j(t)$ are independent Wiener processes; or,

$$\frac{dy_i}{dt} = F_i(y_1, \ldots, y_n, t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\zeta_j(t),$$

where $\zeta_j(t)$ are Gaussian «white noise» processes. The functions $F_i(y_1, \ldots, y_n)$ are piecing-linear, and a_{ij} are piecing-constant.

The problem of estimating the probability density for Markov random processes $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ is reduced to the solution of a system of type two Volterra linear integral equations.

РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, СДЕЛАННЫХ НА ЗАСЕДАНИЯХ СЕМИНАРА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ИНСТИТУТЕ АКАДЕМИИ НАУК СССР

1958

Заседание 25 февраля.

Большев Л. Н., О преобразованиях случайных величин.
Содержание доклада опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», **IV**, 2 (1959).

Заседание 11 марта.

Сарманов О. В., О максимальном коэффициенте корреляции.
Резюме доклада опубликовано в ДАН СССР, **120**, 4 (1958).

Заседание 25 марта и 8 апреля.

Санов И. Н., О вероятностях больших уклонений функционалов от эмпирических функций распределения.
Содержание работы опубликовано в Матем. сб., **42** (84) (1957).

Заседание 6 мая.

Котельникова В. Ф., Критерий двух выборок.
Реферирование работы: H. B. Mann and D. R. Whitney, On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other, Annals of Mathem., **18**, 1 (1947).

Заседание 27 мая.

Смирнов Н. В., О мощности непараметрического критерия максимума отклонения эмпирической функции распределения.
Реферирование работы: Z. W. Birnbaum, On the power of a one-sided test of fit for continuous probability functions, Annals of Math., Stat., **24**, 3 (1953).

Заседание 14 октября.

Севастьянов Б. А. Доверительные пределы для средней вероятности в схеме Пуассона.
Последовательность независимых случайных величин μ_i, принимающих значение 1 с вероятностью p_i и значение 0 с вероятностью $q_i = 1 - p_i$, образует схему Пуассона. Частным случаем этой схемы является схема Бернулли, в которой $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$. Имеются таблицы (A. Hald, Statistical tables and formulas, Wiley, N. Y., 1952), позволяющие определять доверительные интервалы для p в схеме Бернулли по известному числу $\xi_n = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$. Как будет показано ниже, этими же таблицами можно пользоваться для определения доверительных интервалов для средней вероятности $p = (p_1 + \ldots + p_n)/n$ в схеме Пуассона. Это вытекает из следующих двух теорем.

Обозначим $\xi_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ сумму $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$ в схеме Пуассона с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Обозначим верхнюю и нижнюю грани функции распределения $\xi_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ при фиксированной средней вероятности p (m — целое число, $q = 1 - p$)

$$\sup_{p_1+\ldots+p_n=np} \mathbf{P}\{\xi_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leqslant m\} = \Phi_n^+(m; p),$$

$$\inf_{p_1+\ldots+p_n=np} \mathbf{P}\{\xi_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leqslant m\} = \Phi_n^-(m; p).$$

Теорема 1.

$$\Phi_n^+(m, p) = \begin{cases} \sum_{r=0}^{m} C_n^r p^r q^{n-r} & \text{при } m \leqslant np - 1, \\ \max\limits_{k=0,\ldots,[np]} \sum\limits_{r=0}^{m-k} C_{n-k}^r \left(\dfrac{np-k}{n-k}\right)^r \left(\dfrac{nq}{n-k}\right)^{n-k-r} & \text{при } np - 1 < m < np, \\ 1 & \text{при } np \leqslant m; \end{cases}$$

$$\Phi_n^-(m, p) = \begin{cases} 0 & \text{при } m \leqslant np - 1, \\ \min\limits_{k=0,\ldots,[nq]} \sum\limits_{r=0}^{m} C_{n-k}^r \left(\dfrac{np}{n-k}\right)^r \left(\dfrac{nq-k}{n-k}\right)^{n-k-r} & \text{при } np - 1 < m < np, \\ \sum_{r=0}^{m} C_n^r p^r q^{n-r} & \text{при } m \geqslant np. \end{cases}$$

В доказательстве этой теоремы используется одна теорема П. Л. Чебышева о том, что экстремальные значения изучаемых вероятностей достигаются в точке $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ при $p_1 = p_2 = \ldots = p_k$, $p_{k+1} = \ldots = p_l = 1$, $p_{l+1} = \ldots = p_n = 0$.

Пусть $0 < \alpha < 1$. Обозначим корни уравнений

$$\Phi_n^-(k, p) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \Phi_n^+(k, p) = \frac{\alpha}{2}$$

соответственно $p_k(\alpha/2)$ и $P_k(\alpha/2)$. Тогда (p_k, P_k) является доверительным интервалом средней вероятности p в схеме Пуассона при $\xi_n = k$ для доверительной вероятности $1 - \alpha$. Если обозначить $b_k(\alpha/2)$ и $B_k(\alpha/2)$ корни уравнений p

$$\sum_{r=0}^{k} C_n^r p^r q^{n-r} = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \sum_{r=0}^{k} C_n^r p^r q^{n-r} = \frac{\alpha}{2},$$

мы получаем соответствующий доверительный интервал для p в схеме Бернулли

$$b_k\left(\frac{\alpha}{2}\right) < p < B_k\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Теорема 2. *Если $\alpha < 1/2$, то доверительный интервал с доверительной вероятностью $1 - \alpha$ для $p = (p_1 + \ldots + p_n)/n$ в схеме Пуассона $p_k(\alpha/2) < p < P_k(\alpha/2)$ определяется следующими равенствами*

$$p_k\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{cases} b_k\left(\frac{\alpha}{2}\right), & \text{если } k \neq 1, \\ \frac{\alpha}{2n}, & \text{если } k = 1; \end{cases}$$

$$P_k\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \begin{cases} B_k\left(\frac{\alpha}{2}\right), & \text{если } k \neq n-1, \\ 1-\frac{\alpha}{2n}, & \text{если } k = n-1. \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы основано на теореме 1. Так как

$$b_1\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \approx \frac{\alpha}{2n}, \quad b_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \approx 1-\frac{\alpha}{2n},$$

то приведенные в таблицах Хальда доверительные интервалы для вероятности p в схеме Бернулли с $\alpha = 0{,}05$ и $0{,}01$ можно использовать и в схеме Пуассона.

Заседание 28 октября.

Боровков А. А., Большие уклонения максимума решетчатых ограниченных случайных величин.

Введем обозначения: $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — целочисленные ограниченные одинаково распределенные независимые случайные величины;

$$p_i = \mathbf{P}(\xi_k = i), \quad s_0 = 0, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad \overline{s_n} = \max_{0 \leqslant \nu \leqslant n} s_\nu,$$

$$m = \max_{p_i \neq 0} i, \quad -M = \min_{p_i \neq 0} i, \quad w(\lambda) = \sum_{i=-M}^{m} p_i \lambda^{-i}.$$

Предполагается, что общий наибольший делитель возможных значений ξ_k равен 1, а общий наибольший делитель разностей возможных значений ξ_k равен d. Ищется асимптотическое поведение вероятности $u_{x,n} = \mathbf{P}(\overline{s}_{n-1} < x, s_n \geqslant x)$ при $x = o(n)$.

Функция $u_x(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{x,n} z^n$ удовлетворяет уравнению

$$u_x(z) = z \sum_{i=-M}^{m} p_i u_{x-i}(z),$$

граничным условиям $u_0(z) = u_{-1}(z) = \ldots = u_{-m+1}(z) = 1$ и ограничена по x при $|z| < 1$. С помощью разделения ветвей $\lambda_j(z)$ $(j = 1, 2, \ldots, m+M)$ алгебраической функции, порождаемой характеристическим уравнением (х. у.) $zw(\lambda) - 1 = 0$, доказывается, что существует единственное решение поставленной задачи, равное

$$u_x(z) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{x+m-1}(z) \prod_{k=1,\, k \neq j}^{m} \frac{1-\lambda_k(z)}{\lambda_j(z)-\lambda_k(z)},$$

где $\lambda_j(z)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — ветви, обладающие свойством $|\lambda_j(z)| \leqslant \lambda_1(|z|)$ при $|z| < R$, $R = 1/\min w(\lambda)$, и $\lambda_1(|z|)$ — наименьший положительный корень х. у. Используя симметрию $u_x(z)$ по $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_m(z)$ и характер особенностей последних, можно показать далее, что $u_x(z)$ аналитична в области G: $|z| \leqslant R + \delta$, $\delta > 0$, у которой внешность круга $|z| \leqslant R$ разрезана по лучам $\arg z = 2\pi\nu/d$, $\nu = 0, 1, \ldots, d-1$. В точках $z_\nu = R\exp(2\pi i\nu/d)$ функция $u_x(z)$ имеет точки ветвления второго порядка

этих свойств $u_x(z)$ достаточно, чтобы с помощью метода перевала вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_G}\frac{u_x(z)}{z^{n+1}}\,dz = u_{x,n},$$

взятый по границе Γ_G области G.

Заседание 11 ноября.

Баваров Е. А., Беляев П. Ф., Об одном критерии для проверки случайности бесповторного выбора.

Рассматривается генеральная совокупность, содержащая k_1 элементов одного вида, k_2 элементов другого вида, ..., k_s элементов s-го вида. Произведем из данной генеральной совокупности бесповторную выборку объема l. Затем возвратим извлеченные элементы в генеральную совокупность и снова произведем бесповторную выборку того же объема и т. д. Получим, таким образом, n бесповторных выборок, каждая из которых имеет объем l. Через H_0 обозначим гипотезу, состоящую в том, что процесс бесповторного выбора случаен (т. е. каждый раз с равной вероятностью может быть извлечен любой из оставшихся в генеральной совокупности элементов) и что все бесповторные выборки независимы между собой.

Для проверки гипотезы H_0 предлагаются следующие статистики:

$$u_1 = \sum_{i,\,j}\frac{(\nu_j^{(i)} - \mathbf{M}\nu_j^{(i)})^2}{\mathbf{M}\nu_j^{(i)}},$$

$$u_2 = \frac{k-1}{k}\sum_{i,\,j}\frac{(\nu_j^{(i)} - \mathbf{M}\nu_j^{(i)})^2}{\mathbf{M}\nu_j^{(i)}} + \frac{l(k-1)}{k(k-l)}\sum_{i}'\frac{(\nu^{(i)} - \mathbf{M}\nu^{(i)})^2}{\mathbf{M}\nu^{(i)}},$$

$$u_3 = \frac{k-1}{k-l}\sum_{i}\frac{(\nu^{(i)} - \mathbf{M}\nu^{(i)})^2}{\mathbf{M}\nu^{(i)}},$$

где $\nu_j^{(i)}$ — частота элемента i-го вида на j-х местах бесповторных выборок, $i = 1, 2, \ldots, s$; $j = 1, 2, \ldots, l$; $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_s$; $\nu^{(i)} = \sum_{j=1}^{s}\nu_j^{(i)}$.

Доказывается, что при $n \to \infty$ закон распределения случайной величины u_1 сходится к закону распределения случайной величины $[k\eta/(k+1)] + [(k-l)\zeta/(k-1)]$, где η и ζ — независимые случайные величины, распределенные как χ^2 с $(l-1)(s-1)$ и $(s-1)$ степенями свободы соответственно, а законы распределения случайных величин u_2 и u_3 при $n \to \infty$ сходятся к законам распределения случайной величины χ^2 с $l(s-1)$ и $(s-1)$ степенями свободы соответственно, если только гипотеза H_0 верна

Заседание 25 ноября.

Санов И. Н., О вероятностях больших уклонений случайных величин, связанных в однородную цепь Маркова.

Заседание 9 декабря.

Бородачев Н. А., О статистических задачах, возникающих при обработке массовых производственных данных.

Заседание 30 декабря.

Чибисов Д. М., Об оптимальных ранговых критериях.

Реферирование работы: Chia Kuei Tsao, Rank sum tests of Fit, Annals Math. St., 26, 1 (1955).

1959

Заседание 17 февраля.

Болотников Ю. В., Несмещенность и достаточность некоторых непараметрических критериев.

Реферирование работы: Lehman E. L., Consistency and Unbiasedness of Certain Nonparametric tests, Annals Math. St., **22**, 2 (1951).

Заседание 3 марта.

Айвазян С. А., Сравнение оптимальных свойств (эффективности) критериев Неймана-Пирсона и Вальда (последовательного анализа).

Содержание доклада опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», **VI**, 1 (1959).

Заседание 24 марта.

Сарманов О. В., Захаров В. К., Спектры стохастических матриц и количество информации.

1. Пусть даны две конечные схемы событий с симметричной корреляционной таблицей (p_{ij}), $i, j = \overline{1, n}$,

$$p_{ij} = p_{ji} \geqslant 0, \quad p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Обозначим через $1/\lambda_i$, $i = \overline{1, n-1}$ собственные числа, а через $\mathbf{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})$, $k = \overline{1, n-1}$ — собственные векторы стохастической матрицы (p_{ij}/p_i), тогда, как известно, имеет место следующее разложение

$$p_{ij} = p_i p_j \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_{ki} x_{kj}}{\lambda_k} \right], \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{1}$$

В непрерывном случае вместо (1) получим соответствующее спектральное разложение плотности совместного распределения $F(x, y)$ в квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$

$$F(x, y) \sim p(x)\, p(y) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(y)}{\lambda_k} \right], \tag{2}$$

где $p(x) = \int_a^b F(x, y)\, dy$ и ряд (2) сходится в среднем при условии

$$\int_a^b \int_a^b \frac{F^2(x, y)}{p(x)\, p(y)}\, dx\, dy < \infty.$$

2. Координаты векторов $\mathbf{x}_k$ в дискретном случае (и собственные функции $\varphi_k(x)$ в непрерывном случае) целиком определяются заданием положительных весов p_i, $i = \overline{1, n}$; если теперь выбрать λ_k так, чтобы выражения (1) и (2) стали неотрицательными, то корреляционная таблица полностью определяется.

Конечные схемы будут независимы тогда и только тогда, когда все $1/\lambda_k = 0$, $k = \overline{1, n-1}$ (в непрерывном случае, когда все $1/\lambda_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$). Поэтому спектр собственных чисел $1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_{n-1}$ содержит всю информацию о зависимости между конечными схемами.

3. Таким образом, всякая мера зависимости G является функцией спектра:

$$G = G\left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_k}, \ldots \right).$$

К мерам зависимости будем предъявлять следующие требования:

(a) $G(0, 0, \ldots, 0, \ldots) = 0$;

(b) если $\frac{1}{\lambda_i} \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots$, то $G \geqslant 0$;

(c) если $G = 0$, то все $\frac{1}{\lambda_i} = 0$;

(d) знак G должен соответствовать знаку зависимости (зависимость между случайными величинами называется положительной, если с ростом одной величины растет среднее значение другой);

(e) неравенство $G^{(2)} > G^{(1)} > 0$ имеет вероятностный смысл, т. е. в схеме с мерой $G^{(2)}$ зависимость сильнее, чем в схеме с мерой $G^{(1)}$.

Определение 1. Если мера G удовлетворяет требованиям (a) — (c), то она называется исчерпывающей.

Определение 2. Если мера G удовлетворяет требованиям (a), (d), (e), то говорят, что она имеет вероятностный смысл.

4. Исчерпывающими мерами зависимости являются: коэффициент сопряженности (см. [1], стр. 478)

$$\Delta^2 = \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{(p_{ij} - p_i p_j)^2}{p_i p_j} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i^2}, \tag{3}$$

количество информации Шеннона (см. [2], стр. 405)

$$I = \sum_{i,\, j=1}^{n} p_{ij} \ln \frac{p_{ij}}{p_i p_j} \geqslant 0, \tag{4}$$

максимальный коэффициент корреляции (см. [3])

$$R^* = \frac{1}{\lambda_1}, \quad \text{где } \frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_i \frac{1}{|\lambda_i|}. \tag{5}$$

Меры зависимости (3) и (4) не имеют вероятностного смысла, указанного в определении 2.

Обычный коэффициент корреляции между конечнозначными случайными величинами (это частный случай вероятностных схем, которые здесь рассматриваются) удовлетворяет требованиям (a), (b), (d), (e), т. е. имеет вероятностный смысл, но вообще не удовлетворяет требованию (c) и поэтому не является исчерпывающей мерой зависимости.

Теорема. *Для того чтобы коэффициент корреляции был исчерпывающей мерой зависимости, необходимо и достаточно, чтобы он совпадал с максимальным коэффициентом корреляции.*

Корреляционное отношение (см. [4], стр. 385) удовлетворяет только требованиям (a) и (b).

5. Из рассмотренных мер зависимости лишь один максимальный коэффициент корреляции удовлетворяет всем высказанным требованиям (a) — (e).

6. Все формулы (2) — (4) и все выводы с очевидными видоизменениями применимы в непрерывном случае.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Крамер, Методы математической статистики, М., ИЛ. 1948.

[2] С. Голдман, Теория информации, М., ИЛ, 1957.

[3] О. В. Сарманов, Максимальный коэффициент корреляции (симметричный случай), ДАН СССР, **120**, 4 (1958), 715 — 718.

[4] С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, 4-е изд., 1946.

Заседание 7 апреля.

Чибисов Д. М., Распределения критерия χ^2 в случае оценки параметров по методу наибольшего правдоподобия.

Реферирование работы: Chernoff H. and Lehmann E. L., The use of maximum likelihood estimates in χ^2 tests for goodness of fit, Ann. Math. Stat., **25**, 3 (1954).

Заседание 21 апреля.

Чибисов Д. М., Распределение критерия χ^2 в случае оценки параметров по методу наибольшего правдоподобия.

Реферирование работы: Watson G. S., On chi-square goodness of fit tests for continuouses distributions, J. R. Stat. Soc., Ser. B, **20**, 1 (1958).

Большев Л. Н., Доверительная область для линии регрессии.

Резюме опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», V, 3 (1960).

Заседание 19 мая.

Тер-Мкртчан М. Г., Задача о двух выборках.

Боровков А. А., Задача о двух выборках.

Пусть имеются две серии независимых наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ $(n_1 + n_2 = n)$. Обозначим $F_{n_1}(x)$ и $F_{n_2}(x)$ эмпирические функции распределений соответственно первой и второй серии. О распределении меры расхождения между $F_{n_1}(x)$ и $F_{n_2}(x)$ в критерии согласия Н. В. Смирнова известно, что

$$\mathbf{P}\left(\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n}} \sup_x \{F_{n_2}(x) - F_{n_1}(x)\} < z\right) = \mathbf{P}\left(\max_{0 \leqslant \nu \leqslant n} s_\nu < z \mid s_n = 0, \quad \xi_0 = 0\right), \tag{1}$$

где $s_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \xi_k$; $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимы; $\mathbf{P}\left(\xi_k = \sqrt{\frac{n_1}{n n_2}}\right) = \frac{n_2}{n}$, $\mathbf{P}\left(\xi_k = \sqrt{\frac{n_2}{n n_1}}\right) = \frac{n_1}{n}$.

Для отыскания правой части в (1) вычисляется (применением метода перевала при интегрировании производящих функций) значение вероятности

$$\mathbf{P}\left(\max_{0 \leqslant \nu \leqslant n} s_\nu < y, \; s_n = 0 \mid \eta_0 = y - x\right) \text{ при } x > 0, \; y \geqslant 0.$$

Здесь $s_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \eta_k$; $\eta_1, \eta_2, \ldots$ — целочисленные ограниченные случайные величины, распределение которых не зависит от n.

Результаты вычислений дают возможность в случае, когда отношение n_1/n, начиная с некоторого n, остается постоянным, найти главные члены и асимптотическое разложение при $n \to \infty$ для вероятности (1) при любых z (начиная с z, для которых $z\sqrt{n}$ не зависит от n, до $z \sim \sqrt{n_1 n_2 / n}$).

В частности, главная часть вероятности (1) остается равной $1 - \exp(-2z^2)$ (соответственно $\exp(-2z^2)$ для дополнительной вероятности, когда $z \to \infty$), если только $z\sqrt{n} \to \infty$ при $n \to \infty$ и $z = o(n^{1/4})$. При $z \sim \text{const}$ в асимптотическом разложении для вероятности (1) коэффициент при $n^{-j/2}$ зависит от распределения ξ_k довольно сложным образом. Исключением является коэффициент при $n^{-1/2}$, зависящий только от первых трех моментов ξ_k и не зависящий от предельного распределения вероятностей величины первого перескока.

Заседание 20 октября.

Сарманов О. Д., Захаров В. К., Потеря информации о зависимости между случайными величинами при группировке наблюдений.

1. При изучении корреляционной зависимости между двумя случайными величинами на практике получают таблицу частот вида $\{m_{i,j}\}$, $i, j = \overline{1, n}$. Ввиду ограниченного количества наблюдений, при достаточно большом порядке таблицы ее клетки получают весьма слабое заполнение. Поэтому прибегают к группировке наблюдений, что повышает заполнение клеток таблицы и облегчает вычислительную работу. При груп-

пировке наблюдений происходит потеря информации о зависимости между случайными величинами. Настоящий доклад посвящается выяснению величины этой потери.

Мера зависимости должна зависеть не от арифметизации схем (значений случайной величины), а лишь от частот m_{ij}. Поэтому надо рассматривать соответствующие меры, например, максимальный коэффициент корреляции (см. [1], [2]), или коэффициент сопряженности [3], стр. 478 — 479.

2. Группировка наблюдений может быть выполнена в несколько этапов, на каждом из которых лишь два интервала изменения случайной величины объединяются в один. Не уменьшая общности, рассмотрим объединение двух первых интервалов. Мы ограничимся здесь только симметричным случаем, когда $m_{ij} = m_{ji}$. Обозначим $p_{ij} = m_{ij}/N$, где N — число наблюдений.

Укрупнение корреляционной таблицы $\{p_{ij}\}$ происходит по следующей схеме:

$$M = \left\|\begin{array}{cc|c|ccc} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \hline p_{13} & p_{23} & p_{33} & \cdots & p_{3n} \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & & \\ \hline p_{1n} & p_{2n} & p_{3n} & \cdots & p_{nn} \end{array}\right\| \longrightarrow \left\|\begin{array}{ccccc} p'_{11} & p'_{13} & \cdots & p'_{1n} \\ p'_{13} & p_{33} & \cdots & p_{3n} \\ & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p'_{1n} & p_{3n} & \cdots & p_{nn} \end{array}\right\| = M',$$

$$p'_{11} = p_{11} + 2p_{12} + p_{22}, \quad p'_{13} = p_{13} + p_{23}, \ldots, p'_{1n} = p_{1n} + p_{2n}.$$

3. Вся информация о зависимости содержится в спектре стохастической матрицы $P = \left\{\frac{p_{ij}}{p_i}\right\}$, где $p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} > 0$. Известно, что спектр матрицы P имеет вид

$$1 \geqslant \frac{1}{|\lambda_1|} \geqslant \frac{1}{|\lambda_2|} \geqslant \ldots \geqslant \frac{1}{|\lambda_{n-1}|}.$$

Спектр матрицы P', соответствующей укрупненной корреляционной таблице M', имеет вид

$$1 \geqslant \frac{1}{|\lambda'_1|} \geqslant \frac{1}{|\lambda'_2|} \geqslant \ldots \geqslant \frac{1}{|\lambda'_{n-2}|},$$

причем $|\lambda'_i| \geqslant |\lambda_i|$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

4. **Теорема** (см. [4]). *Собственные числа* $1/\lambda'_i$ $i = \overline{1, n-2}$ *укрупненной стохастической матрицы всегда являются средними взвешенными из собственных чисел* $1/\lambda_i$, $1/\lambda_{i+1}, \ldots, 1/\lambda_{n-1}$ *исходной матрицы* P, *т. е.*

$$\frac{1}{\lambda'_i} = \sum_{k=i}^{n-1} a_{ik}^2 \frac{1}{\lambda_k},$$

где $\sum_{k=1}^{n-1} a_{ik}^2 = 1$, $i = \overline{1, n-2}$. *Причем неотрицательные веса* a_{ik}^2 *явно выражаются через координаты собственных векторов матрицы* P, x_{ki} $(k = 1, n-1, i = \overline{i, n})$ *и вероятности* p_i (*например*, $a_{11}^2 = 1 - (x_{11} - x_{12})^2 p_1 p_2 / (p_1 + p_2)$). *Таким образом, потеря информации о зависимости равна*

$$\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda'_1} = \sum_{k=2}^{n-1} a_{1k}^2 \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_k}\right).$$

Следствие 1. Если первые две координаты первого собственного вектора исходной матрицы одинаковы, то максимальный коэффициент корреляции $1/\lambda'_1$ после укрупнения

на первых двух местах не меняется; т. е. потери информации о зависимости после соответствующей группировки событий не происходит ($\lambda_1' = \lambda_1$).

Следствие 2. Если $p_1 x_{11} + p_2 x_{12}$ и $x_{1j} = 0$ $(j = \overline{3, n})$, где x_{1i} $(i = \overline{1, n})$ — координаты первого собственного вектора P, то $\lambda_1' = \lambda_2$, $\lambda_2' = \lambda_3, \ldots \lambda_{n-2}' = \lambda_{n-1}$, т. е. максимальный коэффициент корреляции укрупненной матрицы совпадает со вторым собственным числом исходной матрицы.

Следствие 3. Если $p_1 x_{i1} + p_2 x_{i2} = x_{i3} = \ldots = x_{in} = 0$, то

$$\lambda_1' = \lambda_1,\ \lambda_2' = \lambda_2, \ldots,\ \lambda_{i-1}' = \lambda_{i-1},\ \lambda_i' = \lambda_{i+1}, \ldots,\ \lambda_{n-2}' = \lambda_{n-1}.$$

В частности, максимальный коэффициент корреляции после укрупнения (группировки) не изменяется и, следовательно, потери информации о зависимости после укрупнения не происходит.

Следствие 4. Отрезок, содержащий все собственные числа укрупненной матрицы, всегда лежит в пределах отрезка, содержащего все собственные числа исходной матрицы. Следовательно, при укрупнении положительно определенных матриц полная потеря информации о зависимости произойти не может. В частности, не происходит полной потери информации о зависимости при укрупнении иттерированных матриц, что особенно важно при изучении несимметричного случая $m_{ij} \neq m_{ji}$.

Следствие 5. Если до укрупнения все $\lambda_i = \lambda$, то и после укрупнения все $\lambda_j' = \lambda$, т. е. потери информации о зависимости при укрупнении не происходит.

5. Другие меры оценки зависимости: коэффициент сопряженности $\Delta^2 = \sum_{i=1}^{n-1} 1/\lambda_i^2$, след матрицы (для положительно определенных матриц), количество информации.

ЛИТЕРАТУРА

[1] О. В. Сарманов, Максимальный коэффициент корреляции (симметричный случай), ДАН СССР, **120**, 4 (1958), 715 — 718.

[2] О. В. Сарманов, Максимальный коэффициент корреляции (несимметричный случай), ДАН СССР, **121**, 1 (1958), 52 — 55.

[3] Г. Крамер, Математические методы статистики, М, ИЛ, 1948.

[4] О. В. Сарманов и В. К. Захаров, О спектрах укрупненных стохастических матриц, ДАН СССР, **128**, 2 (1959), 243 — 245.

Заседания 3 и 17 ноября.

Смирнов Н. В., О вероятностях больших отклонений эмпирических функций распределений.

Резюме опубликовано в Трудах III Всесоюзного Математического съезда, **II**, М, Изд. АН СССР, 1956.

Заседание 1 декабря.

Чибисов Д. М., О локальных предельных теоремах теории восстановления. Реферирование работ: W. L. Smith, Renewal theory and its ramifications, J. Roy. Statist. Soc., B **20**, 2 (1958); З. Н. Шарагина, Локальные предельные теоремы для некоторых схем циклических процессов, Кандидатская диссертация, МГПИ им. Потемкина, 1954.

Заседание 22 декабря

Айвазян С. А., О некоторых задачах, возникающих в теории статистического контроля.

Построение условно наилучших в смысле среднего квадратического оценок параметров (на ограниченном статистическом материале).

MISSING AND EXTRA OBSERVATIONS IN ANALYSIS OF VARIANCE

Summary of paper given by William Kruskal, University of Chicago, to the Seminar on the Theory of Probability, University of Moscow, on Friday, May 13, 1960.

In a classical Model I analysis of variance, i. e., linear least squares, problem, one may often have explicit linear formulas for the least squares (Gauss—Markov) estimators of the unknown linear parameters in *another* problem, closely related to the one of immediate interest. The following question then arises; how can we use knowledge of the least-squares estimators in the related problem to obtain the estimators in the problem of immediate interest, without approaching the latter ab initio? Three topics that may be thought of in this general way are the analysis of covariance, so-called missing observations, and so-called extra observations. This paper discusses the latter two.

The general theory of Gauss—Markov estimation is briefly presented in a geometrical or coordinate-free, way, so that the central operation is orthogonal projection of a finite dimensional vector upon a given linear manifold. The missing observations and extra observations set-ups are described in this geometrical language. In both set-ups, it is shown how, given explicit knowledge of the orthogonal projection without missing or extra observations, one can find the orthogonal projection with the missing or extra observations by auxiliary orthogonal projections on linear manifolds of dimension equal to the number of missing or extra observations. In many applications this dimensionality is small, so that the auxiliary projection is readily accomplished.

The material on missing observations leads, of course, to the same results as the traditional approach, but the point of view and terminology are somewhat different. Interpretations of the contents of the paper in terms of matrix inversion or of simultaneous linear equations are possible.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том VI И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 2
1961

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Ю. В. Линник. Разложения вероятностных законов, Изд. Ленинградского университета, 1960, стр. 263.

Монография Ю. В. Линника посвящена весьма специальным вопросам Теории вероятностей, которые берут свое начало с ряда работ Г. Крамера, А. Я. Хинчина и П. Леви. В этой области автору книги принадлежат очень сильные результаты, доказательство которых потребовало привлечения сложных аналитических методов. Хотя в книге изложен конспективно весь необходимый для ее понимания теоретико-вероятностный и аналитический аппарат, ее изучение требует от читателя хорошей математической культуры. В изложении хорошо известных теорем о характеристических функциях получен ряд методических новинок, позволяющих значительно упростить привычные рассуждения. В результате этих упрощений, например теорема С. Бохнера о тождественности класса характеристических функций с классом непрерывных положительно определенных функций, принимающих в нуле значение единица, доказывается коротко и прозрачно.

Первые три главы носят вспомогательный характер и посвящены изложению необходимых сведений из теории вероятностей, теории аналитических функций и теории характеристических функций.

Основное содержание книги составляют главы 4—12, в которых излагаются уже получившие широкую известность теоремы Г. Крамера о разложении законов Гаусса и Д. А. Райкова — о разложении законов Пуассона, общей теоремы А. Я. Хинчина о разложениях на «множители» функций распределения, а также теорема, характеризующая нормальное распределение через независимость линейных форм. Эта последняя теорема была почти одновременно доказана В. П. Скитовичем и Г. Дармуа; прототипом для нее явилась одна изящная теорема С. Н. Бернштейна и некоторые ее обобщения. Указанный материал послужил основой для глав 4—6, некоторые интересные обобщения содержащихся в них результатов даны в главах 11 и 12. Главы 7—10 посвящены доказательству фактов, которые были найдены автором книги и первоначально изложены в цикле статей, напечатанных в журнале «Теория вероятностей и ее применения». Эти теоремы касаются характеристики класса безгранично делимых распределений, разлагающихся только на безгранично делимые компоненты.

Книга заканчивается постановкой нескольких еще нерешенных проблем.

Ленинградский университет издал прекрасную книгу, посвященную, правда, очень специальным вопросам, находящимся на границе теории вероятностей и теории функций. Эта книга, несомненно, найдет свой круг читателей. Развитые в ней методы могут быть полезны в других вопросах. Хотелось бы надеяться, что эта книга побудит ее читателей к поискам других подходов к доказательству содержащихся в ней результатов самого Ю. В. Линника и сделает их более простыми и обозримыми.

Б. В. Гнеденко

Е. Б. Дынкин. Основания теории марковских процессов, М., Физматгиз, 1959, стр. 227.

До самого недавнего времени классическим предметом исследования в теории марковских процессов являлись различные эргодические свойства и предельные теоремы. В последние годы в теории марковских процессов возникли новые направления, связанные, в частности, с попыткой дать классификацию этих процессов с точки зрения структуры их инфинитезимального оператора; к этим направлениям может быть также отнесено например, изучение свойств траекторий марковского процесса, которое обнаружило глубокие связи между поведением этих траекторий и свойствами отвечающих процессу дифференциальных уравнений.

Развитие этих направлений в теории марковских процессов показало, что теория нуждается в новых логических обоснованиях (в частности, обнаружилось, что обычный «принцип марковости» нуждается в некотором усилении). Этой цели и посвящена книга Е. Б. Дынкина «Основания теории марковских процессов». Кратко остановимся на ее содержании.

В первой главе, носящей вспомогательный характер, содержатся основные определения и результаты теории меры. В частности, в ней подробно излагаются свойства условных вероятностей и математических ожиданий; некоторым новшеством в этом круге вопросов является рассмотрение функций и σ-алгебр, определенных не во всем пространстве элементарных событий, а в некотором его подмножестве. Заканчивается эта глава построением вероятностных мер и формулировкой известной теоремы А. Н. Колмогорова о существовании вероятностной меры в пространстве E^T всех функций $\varphi(t)$ на произвольном множестве T со значениями из E. Эта мера определена на σ-алгебре, порожденной множествами вида $\{\varphi : \varphi(t) \in \Gamma\}$ (Γ — борелевское множество в E), и однозначно определяется заданным набором согласованных конечномерных распределений; пространство E может быть произвольным топологическим пространством, представляющимся в виде суммы счетного числа компонентов.

Глава II открывается определением марковского процесса, наглядное представление о котором дается случайно движущейся в некотором фазовом пространстве E частицей: если известно положение частицы в момент времени t, то дополнительная информация о явлениях, наблюдаемых до момента t, не оказывает влияния на возможное поведение частицы после момента t; кроме того, в некоторый случайный момент ζ частица может исчезнуть.

Точное определение довольно сложно. Марковский процесс есть совокупность $X = (x_t,\ \zeta,\ M_t^s,\ \mathbf{P}_{s,x})$, где $\zeta = \zeta(\omega)$ — некоторая случайная величина, принимающая неотрицательные значения («время жизни» процесса), $x_t = x(t, \omega)$ — функция, определенная для $\omega \in \Omega t \in [0, \zeta(\omega)]$, и принимающая значения из некоторого измеримого пространства E, B); M_t^s — σ-алгебры в подмножестве $\Omega_t = \{\omega : \zeta(\omega) > t\}$, $0 \leqslant s \leqslant t$; и, наконец, $\mathbf{P}_{s,x}$ — семейства вероятностных мер, определенные на некоторой σ-алгебре M^s в пространстве Ω, содержащей M_t^s ($t \geqslant s$). При этом должны быть выполнены следующие условия: если $s \leqslant t \leqslant u$ и $A \in M_t^s$, то $\{A, \zeta > u\} \in M_u^s$; $\{x_t \in \Gamma\} \in M_t^s$, а функция $\mathbf{P}(s, x, t, \Gamma) = \mathbf{P}_{s,x}\{x_t \in \Gamma\}$ является измеримой по x при любых $0 \leqslant s \leqslant t$, $\Gamma \in B$ (она называется переходной функцией), $\mathbf{P}(s, x, s, E - x) = 0$ и

$$\mathbf{P}_{s,x}\{x_u \in \Gamma / M_t^s\} = \mathbf{P}(t, x_t, u, \Gamma)$$

почти всюду на Ω_t относительно меры $\mathbf{P}_{s,x}$.

Во второй главе изучаются отношения между эквивалентными процессами, т. е. процессами, определенными в одном и том же фазовом пространстве и имеющими одну и ту же переходную функцию.

Глава III посвящена так называемым подпроцессам (марковский процесс $\widetilde{X} = (x_t, \widetilde{\zeta}, \widetilde{M}_t^s, \widetilde{\mathbf{P}}_{s,x})$ является подпроцессом марковского процесса $X = (x_t, \zeta, M_t^s, \mathbf{P}_{s,x})$, если, грубо говоря, у них одни и те же траектории, за тем исключением, что «время

жизни» $\varphi(\omega)$ процесса $\widetilde{X}$ меньше, чем у процесса: $X : \widetilde{\zeta}(\omega) \leqslant \zeta(\omega)$ при любом ω). Здесь показывается, что если $\mathbf{P}(s, x, s, E) = \mathbf{P}_{s,x}(\zeta > s) = 1$ для любых $s \geqslant 0$, $z \in E$, то условная вероятность

$$\widetilde{\mathbf{P}}_{s,x}\{\widetilde{\zeta} > t \mid M^s\} = \alpha_t^s(\omega)$$

определяет для почти всех $\omega \in \Omega_t$ мультипликативный функционал $\alpha_t^s(\omega)$, т. е.

$$\alpha_t^s(\omega)\,\alpha_u^t(\omega) = \alpha_u^s(\omega)$$

при всех $s \leqslant t \leqslant u$, $\omega \in \Omega_u$, и обратно, каждому мультипликативному функционалу от марковского процесса $X = (x_t, \zeta, M_t^s, \mathbf{P}_{s,x})$ соответствует в том же смысле некоторый подпроцесс $\widetilde{X}$. В частности, подробно рассматриваются подпроцессы $\widetilde{X}$, связанные с моментом $\xi_s(\Gamma)$ первого выхода траектории x_t процесса X из некоторого допустимого множества Γ таким образом, что отвечающий процессу $\widetilde{X}$ мультипликативный функционал α_t^s имеет вид:

$$\alpha_t^s = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_s > t, \\ 0, & \text{если } \xi_s \leqslant t. \end{cases}$$

Далее в этой главе изучаются мультипликативные функционалы α_t^s интегрального типа,

$$\alpha_t^s = \exp\left[-\int\limits_{(s,t)} V(u, x_u)\,\mu(du)\right].$$

Заканчивается третья глава рассмотрением подпроцессов однородного марковского процесса.

В главе IV изучается вопрос о построении марковского процесса по его переходной функции.

Глава V посвящена важному классу так называемых строго марковских процессов если процесс представлять себе как случайно движущуюся частицу, то он будет строго марковским, если при фиксированном положении частицы в случайный момент времени τ, е зависящий от явлений в будущем, на дальнейшее после τ движение частицы события рэш лого не оказывают никакого внимания (в определении обычного марковского процесса момент τ не зависит от случая). Здесь доказывается, что при некоторых ограничениях на переходную функцию марковский процесс автоматически является строго марковским. Одним из таких ограничений может служить требование непрерывности функции

$$F(u, y) = \int\limits_E \mathbf{P}(u, y, t, dz)\,f(z)$$

от u, y для любой непрерывной функции $f(z)$ на фазовом пространстве:

$$\lim_{\substack{y \to x \\ u \downarrow s}} F(u, y) = F(s, x).$$

В последней, VI главе, исследуются условия ограниченности и непрерывности марковского процесса. Эти условия формулируются в терминах о переходной функции. Так, например, если

$$\alpha_\Gamma^\varepsilon(\delta) = \sup_{\substack{0 \leqslant s \leqslant s+\delta \\ x \in \Gamma}} P(s, x, t, V_\varepsilon(x)) \to 0$$

при $\delta \downarrow 0$, где $V_\varepsilon(x)$ есть дополнение любой ε окрестности точки x, то существует марковский процесс с такой переходной функцией, траектории которого непрерывны справа до выхода из множества Γ; если же

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\alpha_\Gamma^\varepsilon(\delta)}{\delta} = 0$$

при любом $\varepsilon > 0$, то существует марковский процесс с такой переходной функцией, траектории которого непрерывны (также до выхода из множества Γ).

В конце книги имеется дополнение, в котором доказана теорема о продолжении емкостей, и на ее основе выводится теорема об измеримости моментов первого выхода из некоторых множеств фазового пространства.

Книга по своему уровню едва ли доступна читателю, незнакомому с основами случайных процессов, хотя формально автор и не опирается на какие-либо предварительные знания из теории вероятностей.

Нужно сказать, что книга написана с исключительной логикой и подкупающей четкостью, но обилие «информации на единицу текста» (в частности, непрерывно возрастающий объем новых понятий и обозначений), несколько затрудняет первое чтение книги.

Оригинальная и интересная работа автора является важным вкладом в теорию вероятностей и, вне всякого сомнения, встанет в ряд лучших книг по этой отрасли математики.

Ю. А. Розанов

Е. Хеннан. Анализ временных рядов (E. J. Hannan, Time series analysis), London—New York, 1960; 152 стр. (англ.)

Книга Хеннана «Анализ временных рядов» посвящена важным вопросам спектральной теории стационарных случайных процессов и их статистики, причем статистические вопросы заметно в ней доминируют (по существу, она представляет собой сборник довольно свежих результатов по статистике стационарных процессов с введением в спектральную теорию).

Несмотря на малый объем книги (всего 140 маленьких страничек!), содержащиеся в ней сведения охватывают почти все существенные факты, касающиеся затрагиваемого круга вопросов, причем изложение этих фактов следует признать очень удачным.

В книге, как правило, отсутствуют какие-либо доказательства, но зато приводится много примеров, иллюстрирующих сформулированные без доказательства предложения.

Часто вместо полного доказательства автор указывает его основные узлы, соединяя их пунктирной цепочкой идей. Например, чтобы получить спектральное представление стационарной последовательности, автор рассматривает «циклический» процесс $x(t)$ $(x(t+n)=x(t)$ при всех t и некотором $n)$, для которого спектральное представление есть простое следствие теорем линейной алгебры. На этом же примере автор объясняет все основные свойства процесса, связанные с этим представлением.

Вообще, нужно отметить, что, хотя автор излагает довольно тонкие результаты, имеющиеся объяснения этих результатов всегда элементарны; в случае, когда такие объяснения отсутствуют, автор отсылает читателя к специальной литературе, приводимой в обширной библиографии. Это делает книгу доступной и интересной не только для специалистов — математиков, но и для широкого круга читателей, нуждающихся в руководстве по статистике стационарных процессов.

Остановимся кратко на содержании книги.

Глава I посвящена некоторым аспектам спектральной теории стационарных процессов. Чтобы проиллюстрировать уровень излагаемых здесь вопросов, достаточно сказать, что автор, в частности, доказывает следующее соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \lambda_{j,n}^{p} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [2\pi f(\lambda)]^{p}\, d\lambda,$$

где $\lambda_{j,n}$ есть собственные числа матрицы ковариаций значений $x(t)$, $t=\overline{0, n-1}$, стационарной последовательности со спектральной плотностью $f(\lambda)$.

Во второй главе раскрывается свойство эргодичности стационарного процесса и исследуются оценки корреляционной функции. Более детально рассматривается «линейный» процесс, т. е. процесс вида

$$x(t) = \sum_{0}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_{t-j},$$

где ε_t — независимые, одинаково распределенные величины. Кроме того, рассматривается случай, когда спектральная плотность зависит от конечного числа параметров и исследуются оценки этих параметров по «методу наименьших квадратов».

Глава III посвящена оценкам спектра стационарного процесса. В ней, в частности, содержатся общие оценки спектральной плотности. Как и раньше, более подробно рассматривается случай «линейного» процесса.

В главе IV продолжается исследование оценок спектра. Для гауссовских процессов приводятся некоторые точные распределения. Кроме того, выписываются соотношения, позволяющие строить доверительные интервалы для спектральной плотности.

Наконец, глава V затрагивает вопросы, близкие к задаче об оценках коэффициентов регрессии.

В заключение отметим, что книга содержит большое количество численных примеров (некоторые из них сопровождаются таблицами или рисунками), что несомненно, делает ее еще более ценной для широкого круга читателей, интересующихся приложениями излагаемой теории.

Ю. А. Розанов

В статье Лян Чжи-шуэн «Инвариантность строго марковского свойства при преобразованиях Дынкина» (данный выпуск, стр. 228) были обнаружены опечатки.

Должно быть:

стр. 228, третья и вторая строка снизу,

4) $\lim\limits_{t \downarrow s} \alpha_t^s \xi_t = \alpha_t^s \xi_s$;

5) $\xi_t \overline{N}^t$-измерима;

стр. 229, четвертая строка сверху,

... для $0 \leqslant t < \tilde{\zeta}(\omega, \lambda)$;

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и в технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых математических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках или на английском, немецком, французском языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах, напечатанной на машинке через 2 интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва, В-234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal «The Theory of Probability and Its Applications» accepts original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technology. Articles of the latter kind will be accepted only if the mathematical methods applied are essentially new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or French, or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten only on one side of the sheet with double spaces.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to address their contributions: Moscow, B-234, MGU (State University), Department of Mathematics and Mechanics.

Технический редактор *Е. И. Гришина*

Подписано к печати 25/IV-1961 г. Тираж 2650 экз. Зак. 3712
Формат бум. 70×108$^1/_{16}$ Печ. л. 9,6 Бум. л. 3$^1/_2$ Уч.-изд. л. 10,5

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10

Цена 1 р. 13 к.

ПЭК 9
УЛ. ГОРЬКОГО 11
ГНТК НТВ
9 1.12 ТЕОР ВЕР

2-26

ТРУДЫ VI ВСЕСОЮЗНОГО СОВЕЩАНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

(Вильнюс № 5 — 14 сентября 1960 г.)

Издательство Академии наук Литовской ССР в текущем году издает Сборник трудов Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике, состоявшегося в сентябре 1960 года в г. Вильнюсе.

Сборник содержит тексты докладов и сообщений, прочитанных на совещании учеными Москвы, Ленинграда, Киева, Ташкента, Вильнюса, Еревана, Тбилиси и других городов Советского союза и посвященных различным вопросам теории случайных процессов, теории массового обслуживания, теории информации, математической статистики и их разнообразным применениям. Краткая информация о работе совещания содержится в I выпуске этого журнала за 1961 год.

Предполагаемый срок выпуска сборника — август 1961 г.

Заказы направлять по адресу:

г. Вильнюс, ул. Косцюшкос 30,
Институт Физики и Математики Академии наук Литовской ССР.
Редакция Сборника трудов VI совещания по теории вероятностей.